# Über Schreibweisen der Feldgleichungen zur Elektrodynamik

André Waser*

Erstellt: 28.06.2000
Letztmal revidiert: 20.02.2007

*Die MAXWELL'schen Gleichungen gelten als Grundstein für die Elektrodynamik. Auch wenn diese Gleichungen über ein Jahrhundert alt sind, werden laufen wieder neue, modifizierte Gleichungssysteme vorgeschlagen und publiziert. Nachfolgend werden einige davon kurz zusammengefasst.*

## Einleitung

Seit 1865 sind die Gleichungen zur Elektrodynamik von James Clerk MAXWELL[15] bekannt. Diese wurden für 20 Feldgrößen definiert, welche später von Oliver HEAVISIDE[11] und William GIBBS[23] in die heute gebräuchliche Form der Vektordarstellung konvertiert wurden. Dies lief nicht ganz ohne Nebengeräusche[3] ab, denn zu dieser Zeit waren einige – darunter auch MAXWELL selbst – überzeugt, dass die korrekte Formulierung der Elektrodynamik mit Quaternionen[5] und nicht mit Vektoren erfolgen sollte. Nach der speziellen Relativitätstheorie EINSTEIN's war es dann auch üblich, die MAXWELL'schen Gleichungen sehr kompakt in Vierervektoren zusammenzufassen.

Noch heute ist die Suche nach magnetischen Monopolen nicht zum Stillstand gekommen. Gäbe es diese Monopole, so würden sich einerseits die Maxwell'schen Gleichungen ohne zusätzliche imaginäre Glieder symmetrisch darstellen lassen, dafür ist die aus der Relativitätstheorie bekannte Folgerung, das Magnetfeld ausschließlich sei eine Folge der Relativbewegung, nicht mehr haltbar.

Intuitiv mag viele die Unsymmerie in MAXWELL's Gleichungen in der heutigen Vektornotation gestört haben, weshalb sie weiterführende Gleichungen vorgestellt und teilweise erfolgreich für verschiedene Anwendungsfälle verwendet haben. Diese Arbeit stellt einige verschiedene „Symmetrierungen" von Gleichungen zur Elektrodynamik zusammen.

* André Waser, Birchli 35, CH-8840 Einsiedeln

## Die Maxwell'schen Gleichungen

### Die Originalgleichungen

Auf der Basis von Überlegungen zur Fluidmechanik hat MAXWELL[15] folgende acht Gleichungen zum elektromagnetischen Feld publiziert (die rechten Gleichungen entsprechen dem Originaltext, die anderen der heutigen Komponenten- bez. Vektorschreibweise):

$$\left.\begin{aligned} p' &= p + \frac{d\,f}{dt} \\ q' &= q + \frac{d\,g}{dt} \\ r' &= r + \frac{d\,h}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{aligned} J_1 &= j_1 + \frac{\partial D_1}{\partial t} \\ J_2 &= j_2 + \frac{\partial D_2}{\partial t} \\ J_3 &= j_3 + \frac{\partial D_3}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{1.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \mu\alpha &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ \mu\beta &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ \mu\gamma &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \mu H_1 &= \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \\ \mu H_2 &= \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \\ \mu H_3 &= \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mu\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{1.2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} &= 4\pi p' \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} &= 4\pi q' \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} &= 4\pi r' \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z} &= 4\pi J_1 \\ \frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial x} &= 4\pi J_2 \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} &= 4\pi J_3 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{1.3}$$

$$\left.\begin{aligned} P &= \mu\left(\gamma\frac{dy}{dt} - \beta\frac{dz}{dt}\right) - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx} \\ Q &= \mu\left(\alpha\frac{dz}{dt} - \gamma\frac{dx}{dt}\right) - \frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy} \\ R &= \mu\left(\beta\frac{dx}{dt} - \alpha\frac{dy}{dt}\right) - \frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz} \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{aligned} E_1 &= \mu\left(H_3 v_2 - H_2 v_3\right) - \frac{dA_1}{dt} - \frac{d\varphi}{dx} \\ E_2 &= \mu\left(H_1 v_3 - H_3 v_1\right) - \frac{dA_2}{dt} - \frac{d\varphi}{dy} \\ E_3 &= \mu\left(H_2 v_1 - H_1 v_2\right) - \frac{dA_3}{dt} - \frac{d\varphi}{dz} \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E} = \mu\left(\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi$$

$$\left.\begin{aligned} P &= k\,f \\ Q &= k\,g \\ R &= k\,h \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \varepsilon E_1 &= D_1 \\ \varepsilon E_2 &= D_2 \\ \varepsilon E_3 &= D_3 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{D} \tag{1.5}$$

$$\left.\begin{aligned} P &= -\zeta p \\ Q &= -\zeta q \\ R &= -\zeta r \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \sigma E_1 &= j_1 \\ \sigma E_2 &= j_2 \\ \sigma E_3 &= j_3 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \sigma\mathbf{E} = \mathbf{j} \tag{1.6}$$

$$e+\frac{d\,f}{dx}+\frac{d\,g}{dy}+\frac{d\,h}{dz}=0 \quad\rightarrow\quad \rho+\frac{\partial D_1}{\partial x}+\frac{\partial D_2}{\partial y}+\frac{\partial D_3}{\partial z}=0 \quad\Rightarrow\quad -\rho=\nabla\bullet\mathbf{D} \qquad (1.7)$$

$$\frac{de}{dt}+\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dy}+\frac{dr}{dz}=0 \quad\rightarrow\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial j_1}{\partial x}+\frac{\partial j_2}{\partial y}+\frac{\partial j_3}{\partial z}=0 \quad\Rightarrow\quad -\frac{\partial\rho}{\partial t}=\nabla\bullet\mathbf{j} \qquad (1.8)$$

Diese Originalgleichungen entsprechen teilweise nicht mehr der heutigen Schreibweise. So enthalten die Originalgleichungen zum Beispiel das Vektorpotential **A**, welches heute üblicherweise eliminiert wird.

Drei heute als MAXWELL'sche Gleichungen bekannte Gleichungen sind neben dem OHM'schen Gesetz (1.6) und der FARADAY-Kraft (1.4) im Original schnell wiederzufinden. Weiter wird die Kontinuitätsgleichung (1.8) für Medien mit Ladungen angegeben.

### Die Original-Quaternion Form der Maxwell'schen Gleichungen

MAXWELL hat die Originalgleichungen von 1865 in seiner Treatise[16] von 1873 bereits etwas modifiziert. Weiter hat MAXWELL versucht, die Quaternion Notation einzuführen, indem er seine Gleichungen auch in einer Quaternion-Schreibweise aufgelistet hat. Allerdings hat er nie mit Quaternionen gerechnet, sondern nur die Resultate in Quaternionform angegeben, wobei er immer nur entweder den skalaren oder den vektoriellen Teil eines Quaternions in einer Gleichung benutzt hat.

Ein allgemeines Quaternion hat einen skalaren (realen) und einen vektoriellen (imaginären) Teil. Im unteren Beispiel ist ‚a' der skalare und '$i$b + $j$c + $k$d' der vektorielle Teil.

$$\mathbb{Q} = a + ib + jc + kd$$

Darin sind a, b, c, und d reelle Zahlen und i, j, k sind sogenannte HAMILTON'sche[7] Einheitsvektoren mit dem Betrag von √-1. Diese erfüllen die Gleichungen

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

und

$$ij = k \qquad jk = i \qquad ki = j$$
$$ij = -ji \qquad jk = -kj \qquad ki = -ik$$

Eine schöne Darstellung über die Rotationseigenschaften der HAMILTON'schen Einheitsvektoren in einem dreidimensionalen ARGAND Diagram hat GOUGH[6] publiziert.

MAXWELL hat nun die Feldvektoren (z.B. $\mathbf{B} = B_1 i + B_2 j + B_3 k$) als Quaternion ohne Skalarteil und die Skalare als Quaternion ohne Vektorteil definiert. Zusätzlich definierte er einen Quaternion-Operator ohne Skalarteil

$$\nabla = \frac{d}{dx_1}i + \frac{d}{dx_2}j + \frac{d}{dx_3}k \quad ,$$

welcher in seinen Gleichungen Verwendung findet. Aus einem ganzen Quaternion hat Maxwell mit zwei Operatoren eine Aufspaltung in den Sklarteil und in den Vektorteil definiert zu:

$$S.\mathbb{Q} = S.(a + ib + jc + kd) = a$$

$$V.\mathbb{Q} = V.(a + ib + jc + kd) = ib + jc + kd$$

Die Original MAXWELL'schen Quaternion-Gleichungen sind dann für isotrope Medien (unverändert, aber angepasste Schriftart, kleiner Buchstabe = skalar, großer Buchstabe gleich Quaternion ohne Skalaranteil):

$$B = V.\nabla A \tag{1.9}$$

$$E = V.vB - \dot{A} - \nabla\Psi \tag{1.10}$$

$$F = V.vB + eE - m\nabla\Omega \tag{1.11}$$

$$B = H + 4\pi M \tag{1.12}$$

$$4\pi J_{tot} = V.\nabla H \tag{1.13}$$

$$J = CE \tag{1.14}$$

$$D = \frac{1}{4\pi} KE \tag{1.15}$$

$$J_{tot} = J + \dot{D} \tag{1.16}$$

$$B = \mu H \tag{1.17}$$

$$e = S.\nabla D \tag{1.18}$$

$$m = S.\nabla M \tag{1.19}$$

$$H = -\nabla\Omega \tag{1.20}$$

Neu an dieser Formulierung – neben der speziellen Notation – ist das erstmalige Erwähnen eines magnetischen Potentialfeldes $\Omega$, aus dessen Gradient ein magnetostatisches Feld berechnet werden kann, und der magnetischen Ladungsdichte m. Mit diesen beiden neuen Größen hat MAXWELL in die Kraftgleichung (1.11) ergänzt.

Wie der Leser sich überzeugen kann, entsprechen diese Gleichungen abgesehen von obigen Ergänzungen den früher publizierten Gleichungen (1.1) bis (1.7), nur die Kontinuitätsgleichung (1.8) wurde diesmal weggelassen. Aus den Formulierungen ist auch zu erkennen, warum sich die Quaternionen trotz heftiger Befürworter wie Professor Peter Guthrie TAIT[19] nicht durchsetzen konnten, denn die von Oliver HEAVISIDE[11] und Josiah Willard GIBBS[23] ausgeführte Vektorrechnung war für die oben gezeigte Anwendung einfacher.

Interessanterweise geriet die Formulierung der magnetischen Ladungsdichte und die damit verbundene Diskussion über die Möglichkeit zur Existenz magnetischer Monopole über ein halbes Jahrhundert wieder in Vergessenheit, bis 1931 Paul André Maurice DIRAC[4] wieder von neuem darüber spekuliert hatte.

 

### Die heutige vektorielle Form der MAXWELL'schen Gleichungen

Die heutige Schreibweise läßt sich aus den Originalgleichungen von 1865 einfach herleiten. Einsetzen von (1.1) in (1.3) ergibt die bekannte Gleichung

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \tag{1.21}$$

Gleichung (1.4) enthält die FARADAY-Gleichung

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mu \mathbf{H} \xrightarrow{\mu = \text{konstant}} \mathbf{E} = \mu\left(\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right) \tag{1.22}$$

und die Potentialgleichung für das elektrische Feld

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \tag{1.23}$$

Zusammen mit der Potentialgleichung (1.2) für das magnetische Feld folgt durch Bildung einer beidseitigen Rotation auf (1.23)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \mathbf{A}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu \mathbf{H}\right) \xrightarrow{\mu = \text{konstant}} \nabla \times \mathbf{E} = \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{1.24}$$

Aus (1.2) folgt weiter durch Bildung der Divergenz:

$$\nabla \bullet \mu \mathbf{H} = 0 \xrightarrow{\mu = \text{konstant}} \mu \nabla \bullet \mathbf{H} = 0 \tag{1.25}$$

Die sechs MAXWELL'schen Gleichungen in heutiger Schreibweise sind:

FARADAY'sches Gesetz
$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \tag{1.26}$$

AMPÈRE'sches Gesetz
$$-\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.27}$$

COULOMB'sches Gesetz
$$\nabla \bullet \mathbf{D} = \rho \tag{1.28}$$

$$\nabla \bullet \mathbf{B} = 0 \tag{1.29}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{1.30}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \tag{1.31}$$

mit

| | | |
|---|---|---|
| **E**: | elektrische Feldstärke | [V / m] |
| **H**: | magnetische Feldstärke | [A / m] |
| **D**: | elektrische Verschiebung | [As / $m^2$] |
| **B**: | magnetische Induktion | [Vs / $m^2$] |
| **j**: | elektrische Stromdichte | [A / $m^2$] |
| $\varepsilon$: | elektrische Permeabilität | [As / Vm] |
| $\mu$: | magnetische Permeabilität | [Vs / Am] |

Interessant ist, daß die MAXWELL'schen Gleichungen in der heutigen Form eine Untermenge der Originalgleichungen darstellen, die zusätzlich eine Ergänzung bezüglich der magnetischen Induktion (1.31) erhalten hat.

Die FARADAY-Gleichung und manchmal auch das OHM'sche Gesetz werden in der heutigen Schreibweise nicht mehr den Maxwell'schen Gleichungen zugeordnet. Selten Erwähnung findet die Kontinuitätsgleichung (1.8). Diese Gleichung beschreibt der Erhalt der Ladung:

$$\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{H}) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \bullet \mathbf{D}) + \nabla \bullet \mathbf{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \bullet \mathbf{j} = 0 \tag{1.32}$$

Die elektrische und magnetische Feldstärke wird als ein physikalisch existentes Kraftfeld interpretiert, welches Kräfte zwischen elektrischen und magnetischen Polen beschreibt. MAXWELL hat durch Überlegungen analog zur Strömungsmechanik diesen Kraftfeldern zwei Potentialfelder zugrunde gelegt, welche in der oben gezeigten heutigen vektoriellen Notation nicht mehr erscheinen. Die Kraftfelder berechnen sich aus den Potentialfeldern wie folgt:

$$-\mathbf{E} = \nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{1.33}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{1.34}$$

mit

| | | |
|---|---|---|
| $\varphi$: | elektrisches Potentialfeld | [V] |
| **A**: | Vektorpotential | [Vs / m] |

Lange Zeit (und vielerorts noch heute) herrschte die Meinung, das Vektorpotential habe keine physikalische Bedeutung. Ein Experiment vorgeschlagen von von Yakir AHARONOV und David BOHM[1] hat gezeigt, daß dies nicht zwingend so sein muss. Es entstand damit die Frage über die Kausalität der Felder. Viele Gründe sprechen dafür, daß die Potentiale $\varphi$ und **A** tatsächlich die Ursache der Kraftfelder **E** und **H** beschreiben.

Durch Einbinden der Materialbeziehungen (1.30) und (1.31), und mit der Berücksichtigung der OHM'schen Beziehung

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \tag{1.35}$$

mit

| | | |
|---|---|---|
| $\sigma$: | spezifische elektrische Leitfähigkeit | [1 / Ωm] = [A / Vm] |

werden die MAXWELL'schen Gleichungen für homogene und isotrope Bedingungen ($\varepsilon$ = konstant, $\mu$ = konstant) zu:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \tag{1.36}$$

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{1.37}$$

$$\varepsilon \nabla \bullet \mathbf{E} = \rho \tag{1.38}$$

$$\mu \nabla \bullet \mathbf{H} = 0 \tag{1.39}$$

## Reelle Erweiterungen der Maxwell'schen Gleichungen

### Der HERTZ-Ansatz

Thomas PHIPPS hat vor kurzem gezeigt, dass Heinrich Rudolf HERTZ ein weiterer Vorschlag zur Änderung der MAXWELL'schen Gleichungen unterbreitet hatte, der Zeit seines Lebens starke Kritik erfahren hat und später schnell in Vergessenheit geriet. Wie aus den Gegenüberstellungen (1.1) bis (1.8) zwischen den Original MAXWELL Gleichungen und der heutigen vektoriellen Schreibweise ersichtlich ist, werden üblicherweise die totalen Differentiale d durch partielle Differentiale $\partial$ substituiert. HERTZ hat die partielle Differentation in den Gleichungen (1.26) und (1.27) wieder durch das totale Differential ersetzt, damit die MAXWELL'schen Gleichungen invariant zur GALILEI-Transformation werden sollten:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \mathbf{j} \tag{1.40}$$

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \frac{d\mathbf{B}}{dt} \tag{1.41}$$

was mit der Identität $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \bullet \nabla$ wird

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{v} \bullet \nabla \mathbf{D} + \mathbf{j} \tag{1.42}$$

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \bullet \nabla \mathbf{B} \tag{1.43}$$

Die Frage stellt sich über die Bedeutung der neu hinzugekommenen Geschwindigkeit **v**. HERTZ hat diese Geschwindigkeit als (absolute) Geschwindigkeit von Ätherelementen interpretiert. Versteht man unter v die Geschwindigkeit von Ladungen, so ist bei MAXWELL (v = 0) die Ladung immer ruhend zum Beobachter zu verstehen. Thomas PHIPPS erklärt diese Geschwindigkeit als Geschwindigkeit einer (Test-)Ladung relativ zum Beobachter.

Konsequenterweise muss auch in (1.33) die partielle Ableitung der Zeit durch das totale Differential ersetzt werden.

$$-\mathbf{E} = \nabla \varphi + \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \bullet \nabla \mathbf{A} \tag{1.44}$$

Die Invarianz von (1.40) und (1.41) gegenüber der GALILEI-Transformation für den Fall, daß keine Ströme **j** und Ladungen vorhanden sind, ist sofort ersichtlich. Für **v** = 0, (eine relativ zum Beobachter ruhende Testladung), resultieren immer die MAXWELL'schen Gleichungen:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{1.45}$$

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.46}$$

Für eine GALILEI-Transformation $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$ und $t' = t$, also für $\mathbf{v} > 0$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \quad \rightarrow \quad \nabla' = \nabla \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \bullet \nabla$$

woraus für alle **v** die Gleichungen

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{D}}{\mathrm{d}t} \tag{1.47}$$

$$-\nabla\times\mathbf{E}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t}$$

gültig sind. Bewegt sich aber der Beobachter mit einer Testladung mit, so reduziert sich das wieder zu (1.45) und (1.46). Das erste Postulat EINSTEIN's[5], daß sich alle physikalischen Gesetze in jedem gleichförmig bewegten System gleich äußern sollen, ist in diesem Beispiel erfüllt. In jedem gleichförmig bewegten Koordinatensystem misst der Beobachter im gezeigten Fallbeispiel immer die ungedämpfte Wellengleichung.

### Der DIRAC-Ansatz

Die Unsymmetrie in diesem Gleichungssystem hat immer wieder zu Erweiterungsversuchen Anlass gegeben. Der Bekannteste stammt von DIRAC[3], der folgende Symmetrierung vorgeschlagen hat:

$$\nabla\times\mathbf{H}=\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mathbf{j}_e \tag{1.48}$$

$$-\nabla\times\mathbf{E}=\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}+\mathbf{j}_m \tag{1.49}$$

$$\varepsilon\nabla\bullet\mathbf{E}=\rho_e \tag{1.50}$$

$$\mu\nabla\bullet\mathbf{H}=\rho_m \tag{1.51}$$

Dieser Ansatz führt mit (1.51) zwangsläufig auf die Postulation von magnetischen Monopolen, welche bis heute nicht (eindeutig) nachgewiesen werden konnten. Als eine Konsequenz dieses Ansatzes werden die Felder **E** und **B** aus den Potentialen hergeleitet:

$$\mathbf{E}=\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\times\mathbf{C} \tag{1.52}$$

$$\mathbf{E}=\nabla\phi-\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial t}-\nabla\times\mathbf{A} \tag{1.53}$$

worin $\phi$ und **C** die komplementären magnetischen Potentiale darstellen. Als eine Konsequenz dieses Ansatzes müssten zwei verschiedene Photonen existieren, die auf unterschiedliche Weise mit Materie eine Wechselwirkung eingehen[14]. Dies wurde bis heute nicht beobachtet.

### Der HARMUTH-Ansatz

Henning HARMUTH[5] (und Konstantin MEYL[17]) gingen einen Schritt weiter und setzten folgende Gleichungen an, die sich vom DIRAC'schen Ansatz dadurch unterscheiden, daß keine Quellenfelder mehr existieren. HARMUTH hat diesen Ansatz benützt, um die Ausbreitung von elektromagnetischen Signalen (Impulse, nicht kontinuierliche Wellen) in Medien mit kleinen OHM'schen Verlusten mit der Randbedingung E = 0 und H = 0 bei $t \le 0$ lösen zu können.:

 

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \tag{1.54}$$

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + s\mathbf{H} \tag{1.55}$$

$$\varepsilon \nabla \bullet \mathbf{E} = 0 \tag{1.56}$$

$$\mu \nabla \bullet \mathbf{H} = 0 \tag{1.57}$$

mit

s: spezifische magnetische Leitfähigkeit [V / Am]

MEYL ging in der Auslegung des Ansatzes weiter und setzte die Gleichungen (1.54) bis (1.57) als immer gültig voraus, was die Folgerung nach sich ziehen würde, daß gar keine Monopole mehr existieren. Die vermeintlichen elektrischen Monopole (Ladungen) wären nach Meyl nur Erscheinungen von elektrischen und magnetischen Dipolen...

HARMUTH[5]-GL.21 hat daraus die Feldgleichung für das elektrische Feld hergeleitet zu

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \left(\mu\sigma + \varepsilon s\right) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - s\sigma \mathbf{E} = 0 \tag{1.58}$$

und gezeigt, dass diese für bestimmte vorgegebene Randbedingungen gelöst werden kann.

#### Der MÚNERA-GUZMÁN-Ansatz

Héctor MÚNERA und Octavio GUZMÁN[19] haben folgende Gleichungen angesetzt ($\omega \equiv ct$):

$$\nabla \times \mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \omega} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \tag{1.59}$$

$$\nabla \times \mathbf{P} = -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \omega} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \tag{1.60}$$

$$\nabla \bullet \mathbf{N} = 4\pi\rho \tag{1.61}$$

$$\nabla \bullet \mathbf{P} = -4\pi\rho \tag{1.62}$$

mit

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{B} - \mathbf{E} \tag{1.63}$$

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{B} + \mathbf{E} \tag{1.64}$$

Daraus können die MAXWELL'schen Gleichungen (1.26)-(1.29) wie folgt erhalten werden:

| | | |
|---|---|---|
| FARADAY'sches Gesetz (1.26): | (1.60) – (1.59) | (1.65) |
| AMPÈRE'sches Gesetz (1.27): | (1.60) + (1.59) | (1.66) |
| COULOMB'sches Gesetz (1.28): | (1.62) – (1.61) | (1.67) |
| | (1.62) + (1.61) | (1.68) |

In dieser Schreibweise wird die Stromdichte **J** und die Ladungsdichte ρ nicht nur elektrisch sondern elektromagnetisch verstanden. Durch eine Analyse wird sichtbar, dass neben dem bekannten elektrischen Skalarfeld auch ein nicht-riviales magnetisches Skalarfeld vorhanden sein sollte.

## Komplexe Erweiterungen der Maxwell'schen Gleichungen

### Die Schreibweise im Minkowski-Raum

Längst etabliert hat sich die relativistische Schreibweise der Elektrodynamik. Auf Grund des zweiten EINSTEIN'schen Postulates[5] der absoluten Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und deren Unabhängigkeit vom Bewegungszustand der Lichtquelle oder des Lichtempfängers wurde die vierdimensionale Schreibweise entwickelt. Allerdings können mit den Kraftvektoren **E** und **H** keine Vierervektoren gebildet werden. Hingegen haben sich die Potentiale und die Ladungsdichten als geeignet herausgestellt, die Elektrodynamik besonders kompakt zu formulieren. Aus dem Ereignisvektor

$$\mathsf{X} = ict + \mathbf{x}$$

folgt im MINKOWSKI-Raum die Invarianz der vierdimensionalen Länge ds

$$ds = \sqrt{dx_\mu dx_\mu} = \sqrt{dx_1 dx_1 + dx_2 dx_2 + dx_3 dx_3 - c^2 dt^2}$$

und

$$d\tau = \frac{i}{c}\sqrt{dx_\mu dx_\mu} = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(dx_1 dx_1 + dx_2 dx_2 + dx_3 dx_3\right)}$$

Daraus wird der vierdimensionale Geschwindigkeitsvektor zu

$$\mathsf{U} = \frac{d\mathsf{X}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\left(ic + \mathbf{u}\right)$$

Daraus folgt die vierdimensionale Stromdichte

$$\mathsf{J} = \rho_0 \mathsf{U} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\left(ic + \mathbf{u}\right)$$

Mit dem vierdimensionalen Gradient Operator

$$^4\nabla = \frac{\partial}{ic\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{k}$$

folgt mit

$$^4\nabla \bullet \mathsf{J} = 0$$

die Kontinuitätsgleichung (1.8). Mit dem vierdimensionalen Vektorpotential

$$\mathsf{A} = i\varphi + \mathbf{A}$$

und mit dem D'ALEMBERT Operator

$$\left(^4\nabla\right)^2 = \Box^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\nu} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}$$

folgt der Zusammenhang

$$\Box^2 \mathsf{A} = \frac{1}{c}\mathsf{J}$$

 

Danach hört allerdings die Möglichkeit zur einfachen Rechnung mit den vierdimensionalen MINKOWSKI'schen Rechnung auf. Um die elektrischen und magnetischen Felder berücksichtigen zu können, wird mit der Definition

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

der elektromagnetische Feldtensor bestimmt:

$$\mathbf{F} = \left\{ \begin{matrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{matrix} \right\}$$

Daraus lassen sich durch zwei Gleichungen mit den Komponenten des Feldtensoers die vier Maxwell'schen Gleichungen ableiten. Mit der ersten Gleichung

$$\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0$$

folgt für eine beliebige Kombination von $\lambda$, $\mu$, $\nu$ zu 1, 2, 3 die MAXWELL'sche Gleichung (1.29)

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial B_3}{\partial x_3} + \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} = \nabla \bullet \mathbf{B} = 0$$

und wenn einer der Indexe $\lambda$, $\mu$, $\nu$ gleich 4 ist, folgt die MAXWELL'sche Gleichung (1.27). Mit der zweiten Gleichung

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c} \mathbf{J}_\mu$$

folgen die inhomogenen MAXWELL'schen Gleichungen (1.26) und (1.28).

#### Einfache komplexe Schreibweise

Eine Möglichkeit, um die Symmetrie der MAXWELL'schen Gleichungen zu erhöhen, bietet der Einbezug von imaginären Zahlen. INOMATA[13] verwendet die imaginäre Achse nur für die „fehlenden" Terme in MAXWELL's Gleichungen. Diese werden dann:

$$\begin{aligned} &\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \qquad && \nabla \bullet \mathbf{D} = \rho \qquad && \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \\ &\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \qquad && \nabla \bullet \mathbf{B} = i\rho_m \qquad && -\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + i\,\mathbf{j}_m \end{aligned} \tag{1.69}$$

Dies ergibt eine imaginäre magnetische Ladung und eine imaginäre magnetische Stromdichte. Die imaginäre Einheit i wird in dieser Schreibweise für Grössen verwendet, welche in der physikalischen Messung auch tatsächlich nicht vorhanden sind. Durch Verwendung von „i" werden dadurch Erweiterungsgrößen in den imaginären Raum $i(x_1, x_2, x_3)$ ausgelagert.

### Acht-dimensionale, komplexe Schreibweise

RAUSCHER[19] gibt eine konsequente Erweiterung der komplexen Schreibweise an, indem jedem Feld und auch den Ladungsdichten ein Real- und Imaginärteil zugeordnet wird:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{Re} + \mathrm{i}\,\mathbf{E}_{Im} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_{Re} + \mathrm{i}\,\mathbf{B}_{Im} \\ \mathbf{j} &= \mathbf{j}_{Re} + \mathbf{j}_{Im} = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_m \\ \rho &= \rho_{Re} + \rho_{Im} = \rho_e + \rho_m \end{aligned} \tag{1.70}$$

Dann können mittels korrekter Trennung der Terme zwei komplementäre Sets von MAXWELL'schen Gleichungen geschrieben werden. Die realen Gleichungen sind:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{D}_{Re} = \varepsilon \mathbf{E}_{Re} & \nabla\bullet\mathbf{D}_{Re} = \rho_{Re} & \nabla\times\mathbf{H}_{Re} = \dfrac{\partial \mathbf{D}_{Re}}{\partial t} + \mathbf{j}_{Re} \\ \mathbf{B}_{Re} = \mu \mathbf{H}_{Re} & \nabla\bullet\mathbf{B}_{Re} = 0 & -\nabla\times\mathbf{E}_{Re} = \dfrac{\partial \mathbf{B}_{Re}}{\partial t} \end{array} \tag{1.71}$$

Durch beidseitiges Eliminieren von i gilt für die imaginären Anteile:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{D}_{Im} = \varepsilon \mathbf{E}_{Im} & \nabla\bullet\mathbf{D}_{Im} = 0 & \nabla\times\mathbf{H}_{Im} = \dfrac{\partial \mathbf{D}_{Im}}{\partial t} \\ \mathbf{B}_{Im} = \mu \mathbf{H}_{Im} & \nabla\bullet\mathbf{B}_{Im} = \rho_{Im} & -\nabla\times\mathbf{E}_{Im} = \dfrac{\partial \mathbf{B}_{Im}}{\partial t} + \mathbf{j}_{Im} \end{array} \tag{1.72}$$

Wie bei INOMATA wird auch bei RAUSCHER die imaginäre Einheit „i" dazu verwendet, physikalisch messbare von physikalisch nicht messbaren Größen zu trennen.

### Die imaginäre Quaternion-Schreibweise

Eine weitere Möglichkeit besteht in der Mischung aus Quaternionen und imaginären Zahlen, was zum Beispiel HONIG[12] ausgeführt hat. Mit dem Vektorpotential und der Stromdichte

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_4 &= \mathrm{i}\,\varphi + \mathrm{A_x}\, i + \mathrm{A_y}\, j + \mathrm{A_z}\, k \\ \mathbf{J}_4 &= \mathrm{i}\,\rho + \rho \mathrm{v_x}\, i + \rho \mathrm{v_y}\, j + \rho \mathrm{v_z}\, k \end{aligned} \tag{1.73}$$

folgen mit dem Operator

$$\Box_q = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial x} j + \frac{\partial}{\partial x} k \tag{1.74}$$

und mit der LORENTZ-Bedingung $\Box_q \bullet \mathrm{A}_4 = 0$ die MAXWELL'schen Gleichungen mit

$$\Box_q^2 \mathbf{A}_4 = \nabla\bullet\mathrm{i}\mathbf{E} + \nabla\bullet\mathbf{B} + \nabla\times\mathrm{i}\mathbf{E} + \nabla\times\mathbf{B} + \left( -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathrm{i}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \mathrm{i}\rho + \mathbf{J}_3 = \mathbf{J}_4 \tag{1.75}$$

Tatsächlich ist diese Schreibweise sehr leistungsfähig. Es ist damit beispielsweise möglich, die Lorentzkraft und weitere Gleichungen aus der Quantenelektrodynamik anzugeben. Allerdings dient „i" dieser Schreibweise nicht mehr zur Trennung von physikalisch messbaren und nicht messbaren Größen. Es ist auffällig, dass gar keine reellen Zahlen mehr allein Verwendung finden, sondern nur zusammen mit der imaginären Einheit oder mit den HAMILTON'schen Einheiten *i*, *j* und *k* vorkommen. Auch diese Schreibweise kann – mit bestimmten Regeln – auf acht Dimensionen erweitert werden. Dies soll in einer anderen Arbeit vorgestellt werden.

## Schlussbemerkungen

Es wurden die verschiedenen Feldgleichungen der klassischen Elektrodynamik vorgestellt. Je nach Anwendungsfall kann die eine oder andere Schreibweise zwar von Vorteil sein, doch letztlich ist die gezeigte Vielfalt unbefriedigend.

Viel diskutiert wird zum Beispiel die mögliche Existenz von magnetischen Monopolen. Doch entweder ist das magnetische Feld nur eine sekundäre Erscheinung der relativen Bewegungen zwischen Ladungen – wie das die Relativitätstheorie fordert – oder das magnetische Feld kann auch aus einem skalaren Feld abgeleitet werden. Im ersteren Fall können keine Monopole existieren, im zweiteren Fall hingegen schon. Bis heute wurden trotz großen Aufwendungen keine magnetischen Monopole nachgewiesen. Somit kann man davon ausgehen, daß kein magnetisches Skalarfeld und Vektorpotential postuliert werden kann und daß die Unsymmetrie in den MAXWELL'schen Gleichungen weiterhin seine Richtigkeit hat.

Versuche zur Erhöhung der Symmetrie mittels imaginären Zahlen sind interessant, bergen aber die Gefahr, daß mit dem einfachen mathematischen Werkzeug „i“ zwar Symmetrierungen schnell herbeigeführt werden können, daß dadurch aber die physikalischen Modellvorstellungen verarmen.

### Referenzen


[1] AHARONOV Yakir & David BOHM, „Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory”, *Physical Review* **115** /3 (01 August 1959)

[2] BARRETT Terence W., “Comments on the HARMUTH ansatz: Use of a magnetic current density in the calculation of the propagation velocity of signals by amended Maxwell theory”, *IEEE Trans. Electromagn. Compatibility* **EMC–30** (1988) 419–420

[3] BORK Alfred M., “Vectors Versus Quaternions – The Letters of Nature“, *American Journal of Physics* **34** (1966) 202-211

[4] DIRAC Paul André Morice, „Quantised Singularities in the Electromagnetic Field“, *Proceedings of the London Royal Society A* **133** (1931) 60-72

[5] EINSTEIN Albert, „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“, *Annalen der Physik und Chemie* **17** (30. Juni 1905) 891-921

[6] GOUGH W., „Quaternions and spherical harmonics”, *European Journal of Physics* **5** (1984) 163-171

[7] HAMILTON William Rowan, “On a new Species of Imaginary Quantities connected with a theory of Quaternions“, *Proceedings of the Royal Irish Academy* **2** (13 November 1843) 424-434

[8] HARMUTH Henning F. “Corrections of Maxwell's equations for signals I,”, *IEEE Transactions of Electromagnetic Compatibility* **EMC-28** (1986) 250-258

[9] HARMUTH Henning F. “Corrections of Maxwell's equations for signals II”, *IEEE Transactions of Electromagnetic Compatibility* **EMC-28** (1986) 259-266

[10] HARMUTH Henning F. “Reply to T.W. Barrett's ‘Comments on the Harmuth ansatz: Use of a magnetic current density in the calculation of the propagation velocity of signals by amended Maxwell theory'“,*IEEE Transactions of Electromagnetic Compatibility* **EMC-30** (1988) 420-421

[11] HEAVISIDE Oliver, „On the Forces, Stresses and Fluxes of Energy in the Electromagnetic Field“, *Philosophical Transactions of the Royal Society* **183A** (1892) 423

[12] HONIG William M., “Quaternionic Electromagnetic Wave Equation and a Dual Charge-Filled Space“, *Lettere al Nuovo Cimento, Ser. 2* **19** /4 (28 Maggio 1977) 137-140

[13] INOMATA Shiuji, „Paradigm of New Science – Principa for the 21st Century**”,** *Gijutsu Shuppan Pub. Co. Ltd. Tokyo* (1987)

[14] KÜHNE Rainer W., „A Model of Magnetic Monopoles“, *Modern Physics Letters A* **12** /40 (1997) 3153-3159

[15] MAXWELL James Clerk, „A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field”, *Royal Society Transactions* **155** (1865) 459–512

[16] MAXWELL James Clerk, „A Treatise on Electricity & Magnetism“, (1873) *Dover Publications, New York* ISBN 0-486-60636-8 (Vol. 1) & 0-486-60637-6 (Vol. 2)

[17] MEYL Konstantin, „Potentialwirbel“, *Indel Verlag, Villingen-Schwenningen* Band **1** ISBN 3-9802542-1-6 (1990)

[18] MEYL Konstantin, „Potentialwirbel“, *Indel Verlag, Villingen-Schwenningen* Band **2** ISBN 3-9802542-2-4 (1992)

[19] MÚNERA Héctor A. and Octavio GUZMÁ, „A Symmetric Formulation of MAXWELL's Equations”, *Modern Physics Letters A* **12** No.28 (1997) 2089-2101

[20] PHIPPS Thomas E. Jr, “On Hertz's Invariant Form of Maxwell's Equations”, *Physics Essays* **6** /2 (1993) 249-256

[21] RAUSCHER Elizabeth A., „Electromagnetic Phenomena in Complex Geometries and Nonlinear Phenomena, Non-HERTZian Waves and Magnetic Monopoles”, *Tesla Book Company, Chula Vista CA-91912*

[22] TAIT Peter Guthrie, “An elementary Treatise on Quaternions”, *Oxford University Press* 1st Edition (1875)

[23] WILSON E. B., “Vector Analysis of Josiah Willard Gibbs – The History of a Great Mind”, *Charles Scribner's Sons* New York (1901)


 