

Die Transportgleichung des Vektorpotentials

André Waser*

Erstellt: 06. Januar 2000
Letztmals revidiert: 14. September 2000

Das Vektorpotential wird seit AHARONOV-BOHM zwar nicht mehr als reines mathematisches Konstrukt ohne physikalische Realität betrachtet, findet aber in der Elektrodynamik häufig eine nur geringe Betrachtung. In diesem Aufsatz wird gezeigt, woher die Definition des Vektorpotentials stammt, wie es auch hätte sinnvoll definiert werden können, und wie es eingesetzt werden kann um auf anschauliche Weise einige Vorgänge in der Elektrodynamik qualitativ besser zu verstehen.

Einleitung

Strömungsanalogien für das elektrische und magnetische Feld

Im Jahre 1856 machte MAXWELL^[1] den Vergleich der elektrostatischen Kraftlinien mit den Stromlinien im Strömungsfeld einer drehungsfreien ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$), reibungsfreien Flüssigkeit (Potentialströmung). Eine elektrische Ladung kann mit einer räumlichen Quell- oder Senkenströmung veranschaulicht werden. Für eine Quelle im Koordinatenursprung ist in Kugelkoordinaten (r : Radius gemessen vom Ursprung)

$$\text{Potentialfeld:} \quad \Phi(r) = -\frac{E}{4\pi} \frac{1}{r} \quad (1.1)$$

$$\text{Geschwindigkeitsfeld:} \quad \mathbf{v}(r) = \nabla\Phi = \frac{E}{4\pi} \frac{1}{r^2} \quad (1.2)$$

Mit der Ergiebigkeit E wird die Quellenstärke bezeichnet, welche von Radius r der Kugel unabhängig ist. Analog dazu gilt für eine positive bez. negative Elementarladung:

$$\text{Elektrisches Potential:} \quad \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (1.3)$$

$$\text{Elektrisches Feld:} \quad \mathbf{E}(r) = \nabla\varphi = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (1.4)$$

worin Q die elektrische Ladung ist. Der Vergleich zeigt, daß die elektrische Ladung mit der Quellstärke und das elektrische Feld mit dem Geschwindigkeitsfeld einer stationären Quell-

* Birchli 35, CH-8840 Einsiedeln, Switzerland

oder Senkenströmung verglichen werden kann. Die elektrischen Feldlinien entsprechen in dieser (stationären) Analogie den Stromlinien. Wegen der Identität $\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times (\nabla\Phi) \equiv 0$ oder analog $\text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times (\nabla\varphi) \equiv 0$ wird das elektrische Feld auch als drehungs- oder wirbelfrei bezeichnet, was nicht gleichbedeutend mit rotationsfrei ist^[9].

Das Problem der räumlichen Quell/Senkenströmung liegt im singulären Punkt des Ursprungs, wo der Radius gegen Null und deshalb die Geschwindigkeit bez. das elektrische Feld gegen unendlich geht. In der Strömungstechnik kann eine hundertprozentige Quell- bez. Senkenströmung unter Einhaltung der Kontinuitätsgleichung nicht realisiert werden.

Die zweite Analogie wird ebenfalls durch MAXWELL angegeben. Nicht zufällig hat in derselben Zeit, wo MAXWELL seine Theorien auf Grund der Annahme eines Äthers hergeleitet hat, auch HELMHOLTZ^[7] seine Theorien der Wirbelströmung entwickelt (1858). Die Beschreibung eines Magnetfeldes außerhalb eines geraden, stromführenden Drahtes ist dabei analog zu einem ebenen Potentialwirbel. Die Wirbelstärke Γ (Zirkulation) ist gleich der Stromstärke I im Draht. Der Draht entspricht dem Wirbelfaden.

Geschwindigkeitsfeld ebener Potentialwirbel:
$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{r} \quad (1.5)$$

Magnetfeld um einen geraden, stromdurchflossenen Leiter:
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \frac{I}{r} \quad (1.6)$$

Die Gleichungen (1.5) und (1.6) gelten für die Beträge der Wirbelfelder. Auch hier ist im Wirbelzentrum ein singulärer Punkt, wo die Beträge der Geschwindigkeit \mathbf{v} bez. des Magnetfeldes \mathbf{H} mit abnehmendem Radius gegen unendlich gehen.

Die Potentialfelder

Wie in Gleichung (1.4) erwähnt, kann das elektrische Feld \mathbf{E} aus einem skalaren Feld φ durch Gradientenbildung abgeleitet werden. Die magnetische Induktion \mathbf{B} kann ebenfalls aus einem Potentialfeld abgeleitet werden, welches in der Fluidmechanik der Stromfunktion ψ und in der Elektrodynamik dem Vektorpotential \mathbf{A} entspricht.

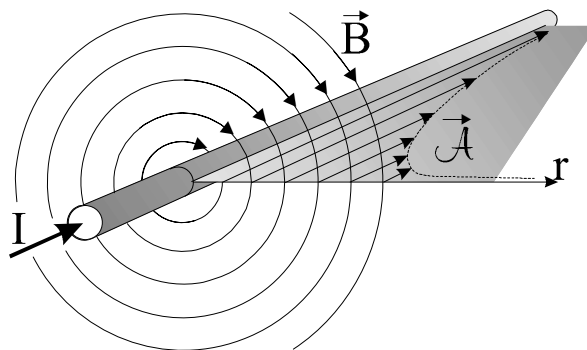


Bild 1: Vektorpotential eines geraden, stromführenden Leiters

Zur Beschreibung der Wirbelbewegung des \mathbf{B} -Feldes wird die Wirbelursache \mathbf{A} derart definiert, daß \mathbf{B} entsprechend der Gleichung

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.7)$$

berechnet werden kann. Die Richtung der Wirbelursache (Vektorpotential \mathbf{A}) bestimmt die Drehrichtung des Magnetfeldwirbels \mathbf{B} und zeigt gemäß untenstehender Definition in die Richtung des elektrischen Stromes $I ds$.

Definition: Vektorpotential des Stromelements:
$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mu}{4\pi} \frac{I ds}{r} \quad (1.8)$$

Der Betrag $|\mathbf{A}(\mathbf{r})|$ ist proportional zum \mathbf{B} -Wirbelfeld und beschreibt eine Proportionalität $1/r$, welche in der Fluidmechanik mit Potentialwirbel bezeichnet wird. Man beachte, daß diese Definition von MAXWELL aus reiner Zweckmäßigkeit erfolgte, damit die Wirkungsrichtung in Abhängigkeit der Ursachenrichtung korrekt berücksichtigt werden kann. Daß diese Definition des Vektorpotentials \mathbf{A} auch analog zu einer Strömung aufgefaßt werden kann, wurde später oftmals erwähnt^[3].

Das Vektorpotential hat die Einheit Volt-Sekunde/Meter. Damit in der Einheit eine Analogie zu einer Strömung vorhanden ist, würde beispielsweise eine Einheit Volt-Meter/Sekunde benötigt. Dies wird durch die Multiplikation mit dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit erreicht. Das Differential des Vektorpotentials hat dann die

neue Definition:
$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{I ds}{r} \quad \left[\frac{\text{Vm}}{\text{s}} \right] \quad (1.9)$$

Und die magnetische Induktion berechnet sich dann gemäß

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.10)$$

Während MAXWELL^{[11]-Vol.1} die beiden Potentialfelder als physikalische Realität eines Zweistoffäthers betrachtet hat, haben seine späteren Interpreten wie HEAVISIDE, FITZGERALD, LODGE und HERTZ (The Maxwellians nach BARRETT^[2]) die Formeln MAXWELL's so interpretiert, daß die Potentiale zwar mathematische Hilfskonstruktionen sind aber keine physikalische Realität haben. Dies war um so einfacher, als nach 1905 durch die Publikation von EINSTEIN^[4] auf die Annahme eines Äthers verzichtet werden konnte.

Die Physiker Yakir AHARONOV und David BOHM^[1] machten 1959 den Vorschlag, die physikalische Bedeutung des Vektorpotentials mit Hilfe eines neuen Experiments aus dem Gebiet der Quantentheorie zu überprüfen. Sie konnten in dem seither nach ihnen benannten Effekt nachweisen, daß sich die Eigenschaften eines \mathbf{B} -feldfreien Raumes, in dem trotzdem ein Vektorpotential \mathbf{A} vorhanden ist, auf die quantenmechanische Wellenfunktion des Elektrons auswirkt. AHARONOV und BOHM kommen zum Schluß, daß das Vektorpotential tatsächlich physikalisch wirksam sein kann und daß die Potentiale fundamentaler sind als die daraus abgeleiteten Felder.

Potentiale sind die Ursache der Felder

Die Darstellung des magnetischen und elektrischen Feldes aus den Potentialen geht auf MAXWELL zurück und läßt sich wie folgt darstellen:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.11)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.12)$$

MAXWELL's Originalgleichungen für das elektrische Feld

Wenn das Induktionsfeld **B** seine Ursache in einem Vektorpotential **A** hat, so ist die Vermutung zulässig, daß dies auch für das Elektrische Feld **E** so sein könnte. MAXWELL schreibt in seiner Treatise^{[11]-Vol.2,S258} für die x-Richtung des elektrischen Feldes folgende Gleichung (in Originalform):

$$P = c\dot{y} - b\dot{z} - \frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx} \quad (1.13)$$

mit den Symbolen:

- E**: Elektromotorische Kraft (Elektrisches Feld)
B: Magnetische Induktion
A: Elektromagnetischer Impuls (Vektorpotential)
G: Geschwindigkeit eines Punktes
Ψ: Elektrisches Potential

in Komponenten:

- P Q R
a b c
F G H
 \dot{x} \dot{y} \dot{z}

Der Vollständigkeit halber sei auch die folgende Originalgleichung halb in Vektorschreibweise halb in Quaternionen-Schreibweise von MAXWELL^[11] angegeben:

$$\mathbf{E} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{GB} - \dot{\mathbf{A}} - \nabla \Psi \quad (1.14)$$

Der Operator „V.“ bedeutet, daß nach der Quaternionen-Multiplikation nur der vektorielle Teil des Quaternion-Ergebnisses verwendet wird. Wirft man aber den skalaren Teil des Quaternions weg, so handelt es sich nur noch um eine reine vektorielle Rechnung (ähnlich dem, wie wenn man bei einer komplexen Zahl den Imaginärteil wegwirft und nur mit reellen Zahlen weiter rechnet). MAXWELL hat zwar versucht, seine Gleichungen in Quaternionendarstellung anzugeben, hat aber eine echte Quaternionenrechnung nie durchführen können, da er einmal den skalaren Teil, ein anderes mal den vektoriellen Teil immer wieder wegwerfen mußte, was letztlich dem Rechnen mit Vektoren und Skalaren gleichkommt^[16]. In der heutigen Form schreibt sich die Gleichung (1.13):

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.15)$$

Interessant ist die frühere Bezeichnung des Vektorpotentials als „elektromagnetischer Impuls“, was formal auch mit „elektrische Masse · Geschwindigkeit“ übersetzt werden kann.

Die Transportgleichung für das Vektorpotential

Wird die magnetische Induktion **B** durch dessen Ursache, das Vektorpotential **A** (1.7), ersetzt, so ist

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (1.16)$$

Bis auf das elektrische Potential φ hängt das elektrische Feld **E** nur noch vom Vektorpotential **A** ab. Die Gleichung (1.16) weist bereits einige Analogien zur Transportgleichung in der Fluidmechanik auf. Immerhin hat MAXWELL seine Gleichungen auf Grund von strömungstechnischen Überlegungen in einem Fluid (Äther) gewonnen. Die Geschwindigkeit **v** entspricht bei MAXWELL der Geschwindigkeit **G** eines Punktes im ruhenden Äther. Dieser bewegte Punkt wird als die Bewegung eines „elektrischen“ Ätherelements interpretiert (z.B. THOMSON^[14]). Die Transportgleichung für die Mitführung

einer beliebigen vektoriellen Größe \mathbf{X} mit einem Fluidelement ist bei einer stetig verlaufenden Strömung in einem kartesischen Koordinatensystem definiert durch die substantielle Ableitung

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{X} \quad (1.17)$$

wobei \mathbf{v} die Geschwindigkeit eines Fluidelements ist. Das totale zeitliche Differential entspricht der substantiellen (totalen) zeitlichen Änderung eines Vektors, welcher einem Fluidelement zugeordnet ist. Dieses totale Differential setzt sich zusammen aus der lokalen Änderung $\partial\mathbf{X}/\partial t$ (zeitliche Änderung bei festgehaltenem Ort) sowie aus der konvektiven Beschleunigung $\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{X}$ (zeitliche Änderung bei Ortsänderung). Der lokale Term verschwindet bei einer stationären Strömung, der konvektive Term im allgemeinen nicht. Der konvektive Term läßt sich umformen zu

$$\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{X} = \nabla \left(\mathbf{v} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{X}} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{X}) = \nabla\mathbf{X} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{X}) \quad (1.18)$$

wobei der senkrechte Pfeil nach dem Nabla-Operator bedeutet, daß in der nachfolgenden partiellen Ableitung nur der mit dem Pfeil gekennzeichnete Vektor abgeleitet wird. Setzen wir diesen Zusammenhang (1.18) in die Gleichung (1.17) ein, so ergibt sich:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial t} + \nabla \left(\mathbf{v} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{X}} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{X}) = \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial t} + \nabla\mathbf{X} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{X}) \quad (1.19)$$

Die Analogie mit der MAXWELL'schen Originalform für das elektrische Feld \mathbf{E} ist offensichtlich. Setzen wir die vektorielle Größe eines Fluidelements gleich dem Vektorpotential \mathbf{A} , so gilt für das elektrische Feld

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{d\mathbf{A}}{dt} \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{A} \\ \text{Transportgleichungen des Vektorpotentials:} \quad \mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \left(\mathbf{v} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{A}} \right) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Diese Gleichung ist auf alle Geschwindigkeiten \mathbf{v} eines Fluidelements anwendbar. Für die Randbedingung $\mathbf{v} = \text{konstant}$ (unabhängig von Raumvariablen) folgt weiter^{[6],[12]}:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (1.21)$$

Das Vektorpotential \mathbf{A} kann analog zum Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} einer Fluidströmung aufgefaßt werden^[16]. In dieser Analogie entspricht das elektrische Feld dem Beschleunigungsfeld \mathbf{a} . Die Analogie zu einem Strömungsfeld wird nachfolgend etwas erläutert.

Analogie des Vektorpotentials zu einem Geschwindigkeitsfeld

Die LORENTZ-Kraft

Das Verhalten einer bewegter Ladungen wird anhand des Synchrotrons überprüft. Beim Synchrotron sind die LORENTZ-Kraft \mathbf{F}_E und die Zentrifugalkraft \mathbf{F}_Z einer Ladung q im homogenen Feld \mathbf{B} im Gleichgewicht. Die Ladung mit der Ruhemasse m_0 bewegt sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} auf einer Kreisbahn mit dem Radius R , so daß gilt:

$$m_0 \frac{v^2}{R} = q v B \quad (1.22)$$

Dasselbe Ergebnis läßt sich auch mit dem Vektorpotential herleiten. Für ein homogenes Magnetfeld kollinear zu der z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems muß das Vektorpotential dem Verlauf eines starren Wirbels in der x-y-Ebene genügen mit dem Ansatz

$$\mathbf{A}_2 = (\mathbf{A}_x \ \mathbf{A}_y \ \mathbf{A}_z) = \zeta(-y \ x \ 0) \quad (1.23)$$

welcher folgender Grafik entspricht:

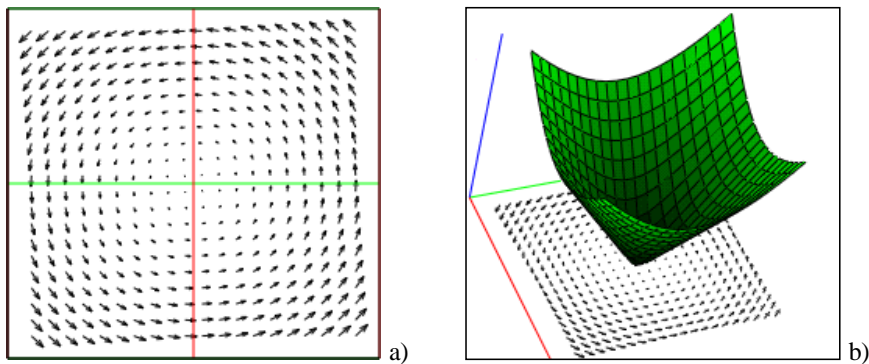


Bild 2: Vektorpotential für ein homogenes \mathbf{B} -Feld in Richtung der z-Achse; a) Vektorfeld in der x-y-Ebene; b) Amplitude pro Punkt in der x-y-Ebene

Für die einzelnen Terme von Gleichung (1.20) wird für $\partial_t \mathbf{A} = 0$:

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = 2\zeta (v_y \ -v_x \ 0) \quad (1.24)$$

$$\nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \zeta (v_y \ -v_x \ 0) \quad (1.25)$$

und somit mit (1.20):

$$\mathbf{E} = -\nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \zeta (v_y \ -v_x \ 0) \quad (1.26)$$

Weiter ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_E &= \mathbf{F}_Z \\ q\mathbf{E} &= m_0 \mathbf{a} \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$q\zeta \begin{pmatrix} v_y(t) \\ -v_x(t) \\ 0 \end{pmatrix} = m_0 \begin{pmatrix} dv_x/dt \\ dv_y/dt \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese zwei gekoppelten Differentialgleichungen haben die Lösung:

$$\Omega \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) \\ -\sin(\Omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \sin(\Omega t) / dt \\ d \cos(\Omega t) / dt \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

mit

$$\begin{aligned} v_y(t) &= \cos(\Omega t) \\ v_x(t) &= \sin(\Omega t) \end{aligned}$$

$$\Omega = \frac{q\zeta}{m} = \frac{q\mathbf{B}}{m} \quad \text{mit } \zeta = |\mathbf{B}|.$$

Diese Lösung entspricht einer Kreisbahn, wobei die Kreisfrequenz Ω unabhängig vom Radius r und unabhängig von der Geschwindigkeit v , so wie das beim Synchrotron bekannt ist. Mit Blick auf Bild 2 ist das nicht überraschend, bildet doch das Vektorpotential \mathbf{A} einen starren Wirbel aus, wo die Bahngeschwindigkeit \mathbf{v} proportional mit dem Radius r zunimmt und wo überall die Kreisfrequenz konstant ist.

Die Gleichung (1.20) führt zur erwarteten Lösung. Allerdings zeigt das Beispiel des Synchrotrons auf, daß in diesem Fall die eigentliche LORENTZ-Kraft nach (1.24) den doppelten Wert hat als nach der klassischen Gleichung $\mathbf{F}_E = q \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})$ berechnet. Erst der neue Term (1.25) ergibt zusammen mit (1.24) wieder das erwartete Ergebnis. Man kann also für die LORENTZ-Kraft folgender Vergleich anstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{E\text{-klassisch}} &= \mathbf{F}_{E\text{-neu}} - \mathbf{F}_G \\ q[\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})] &= q[\mathbf{v} \times 2(\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}] \end{aligned} \quad (1.29)$$

Daraus folgt für die magnetische Induktion \mathbf{B} und für das Vektorpotential \mathbf{A} des Stromelements Ids:

$$\mathbf{B}_{\text{neu}} = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A})^\dagger \quad (1.30)$$

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Id\mathbf{s}}{r} \quad (1.31)$$

Da die Definition des Vektorpotentials nach (1.8) gerade so erfolgte, daß $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ ist, kann das Vektorpotential auch so definiert werden, daß $\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ ist.

Magnetfeldfreier Raum

Es wird erwartet, daß der Gradiententerm $-\nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ in Gleichung (1.20) sich besonders dann bemerkbar auswirkt, wenn das Magnetfeld \mathbf{H} oder genauer die magnetische Induktion $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \approx 0$ ist. Diese Bedingung ist beispielsweise erfüllt, wenn das Vektorpotential einen Feldverlauf beschreibt, welcher in der Fluidmechanik als Potentialströmung bekannt ist. In diesem Fall ist die drehungsfrei Komponente (nennen wir sie \mathbf{A}_1) deutlich größer als die (im Idealfall nicht vorhandene) drehungsbehaftete Komponente \mathbf{A}_2 . Es wird nun erwartet, daß die drehungsfreie Komponente des Vektorpotentials kein Magnetfeld und somit keine Kraft auf eine bewegte Ladung in diesem Feld bewirkt.

Als bekanntes Beispiel, wo diese Bedingung nahezu erreicht wird, ist das \mathbf{B} -Feld außerhalb eines sehr langen Solenoids (einlagige Spule). Sei die Spulennachse parallel zur z-Achse, dann hat das zugehörige Vektorpotential \mathbf{A} keine Komponente in z-Richtung. Somit:

[†] In der Fluidmechanik existiert die analoge Beziehung $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$, worin \mathbf{v} der Geschwindigkeit und $\boldsymbol{\omega}$ der Drehung eines Fluidelements entspricht.

$$\mathbf{A} = \frac{nIa}{2\epsilon_0 c^2} \frac{a}{a^2 + r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

- a: Radius einer Spulenwindung [m]
 I: Strom durch die Spule [A]
 n: Anzahl Windungen pro Spulen-Längeneinheit [m⁻¹]

Die grafische Umsetzung von Gleichung (1.32) ist nachstehend abgebildet.

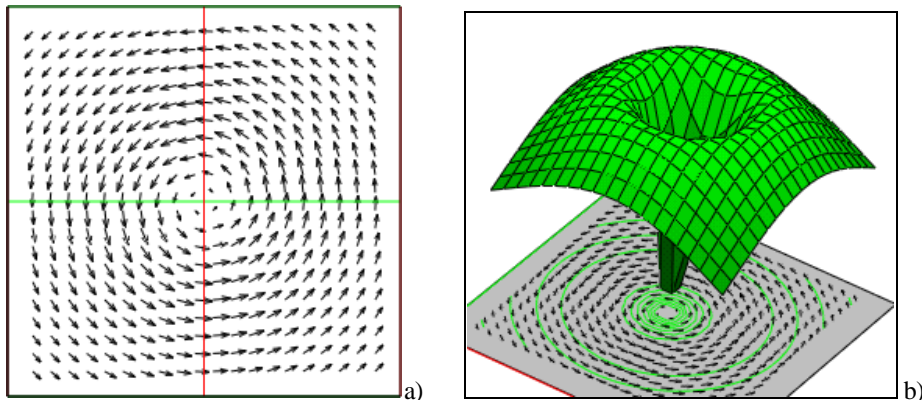


Bild 3: Vektorpotential eines langen Solenoids mit Spulenachse auf z-Achse; a) Vektorfeld in der x-y-Ebene; b) Vektorfeld und Amplitude in der x-y-Ebene.

In großer Entfernung zur Spule ($r \gg a$) ist die Amplitude von \mathbf{A} in Bild 3b proportional zu $1/r$, so daß die Bedingung $\mathbf{A}_1 \gg \mathbf{A}_2$ erfüllt ist.‡ Für große Entfernungen und mit $z = 0$ kann die Gleichung für das Vektorpotential weit außerhalb des Solenoids geschrieben werden:

$$\mathbf{A} = \frac{nIa^2}{2\epsilon_0 c^2} \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

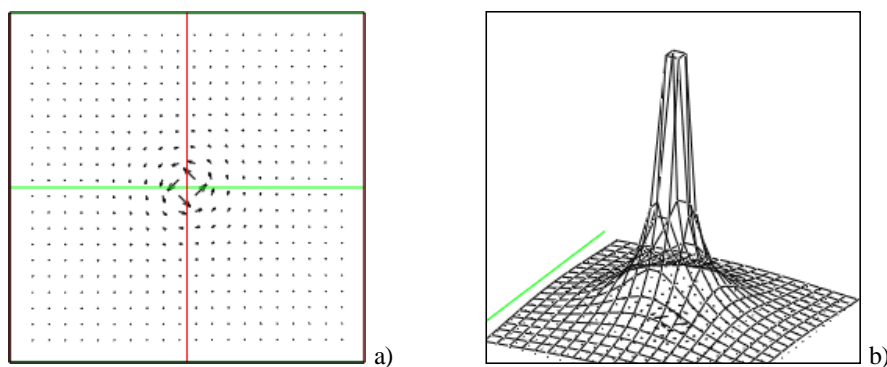


Bild 4: Vektorpotential als idealer Potentialwirbel; a) Vektorfeld in x-y-Ebene; b) Vektorfeld in x-y-Ebene und zugehörige Amplitude pro Punkt in x-y-Ebene.

‡ Es ist an dieser Stelle zu bemerken, daß der skizzierte Amplitudenverlauf dem von HUBER [8] geforderten realistischen Wirbel als Parallelschaltung eines Potentialwirbels $\sim 1/r$ und eines starren Wirbels $\sim r$.

Das Magnetfeld $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ zu diesem Vektorpotential ist jetzt exakt Null. Auf eine mit \mathbf{v} bewegter Ladung q in diesem Feld \mathbf{A} wirkt aber wegen dem Gradiententerm immer noch eine Kraft \mathbf{F}_G gemäß:

$$\mathbf{F}_G = q\mathbf{E} = -q\nabla\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = -q \frac{nIa^2}{2\epsilon_0 c^2} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} -v_y(x^2 - y^2) + 2v_x xy \\ -v_x(x^2 - y^2) - 2v_y xy \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

Setzen wir diese Gradientenkraft gleich der Massenträgheit $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, dann folgt die Differentialgleichung:

$$m \begin{pmatrix} dv_x / dt \\ dv_y / dt \end{pmatrix} = -\frac{\xi}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} -v_y(x^2 - y^2) + 2v_x xy \\ -v_x(x^2 - y^2) - 2v_y xy \end{pmatrix} \quad \text{mit } \xi = q \frac{nIa^2}{2\epsilon_0 c^2} \quad (1.35)$$

Eine Umformung ergibt:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} - \left(\frac{\xi}{mr^2} \right)^2 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = 0 \quad \text{mit } r^2 = x^2 + y^2 \quad (1.36)$$

Diese homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung hat eine triviale Lösung für $r = \text{konstant}$:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{V}_1 e^{\frac{\xi}{mr^2}t} + \mathbf{V}_2 e^{-\frac{\xi}{mr^2}t} \quad \text{mit } r = \text{konstant} \quad (1.37)$$

Physikalisch bedeuten gemäß Herleitung die unterschiedlichen Vorzeichen im Exponenten die unterschiedlichen Vorzeichen der elektrischen Elementarladung q . Es ist zu erwarten, daß auf Ladungen in einem drehungsfreien Vektorpotentialfeld auch Kräfte wirken, wenn das Magnetfeld Null ist. Die Geschwindigkeit \mathbf{v} verändert gemäß (1.37) (bei $r = \text{konstant}$) die Richtung nicht, aber den Betrag. Die Bedingung $r = \text{konstant}$ bedeutet, dass im Beispiel der kreisförmigen Potentialströmung (s. Bild 5) die Ladung den Äquipotentiallinien von \mathbf{A} folgt.

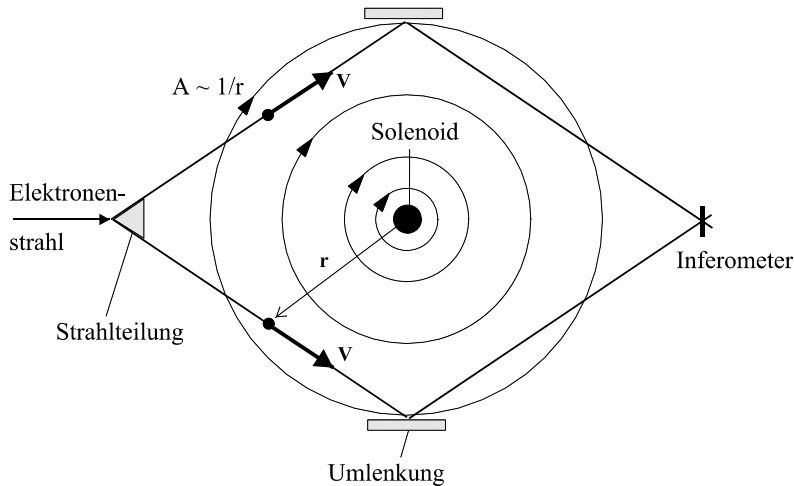


Bild 5: Versuchsaufbau zur Messung des AHARONOV-BOHM Effekts

Betrachten wir in Bild 5 den Versuchsaufbau zum Nachweis des AHARONOV-BOHM Effekts. Dazu werden Ladungsträger mit gleicher Energie (Frequenz) zuerst aus einem Strahl aufgeteilt in zwei Teilstrahlen, welche um den Solenoid gelenkt und anschließend wieder auf einen Brennpunkt zusammengefügt werden.

Ist der Spulenstrom Null, so zeigt sich am Brennpunkt der beiden Teilstrahlen das bekannte Interferenzmuster. Die Ladungen bewegen sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} entlang des eingezeichneten Weges. Wird der Spulenstrom eingeschaltet, so werden die Geschwindigkeiten der beiden Teilstrahlen in gleichem Masse verändert. Das Interferenzmuster bleibt dann zwar immer noch erhalten, seine Phasenlage jedoch verschiebt sich wegen der neuen Geschwindigkeit der Ladungen. Diese Phasenänderung kann somit auf die Laufzeitunterschiede für die Ladungen ohne und mit einem drehungsfreien Vektorpotential zurückgeführt werden.

Natürlich ist damit der AHARONOV-BOHM Effekt nicht quantitativ erklärt. Dazu fehlt eine genauere (und quantenmechanische) Beschreibung einer Elementarladung. Doch die sehr einfache Herleitung zeigt, dass qualitativ der AHARONOV-BOHM Effekt durch den Zusatzterm in (1.20) anschaulich erklärt werden kann.

Erweiterung der Maxwell'schen Gleichungen

Die Transportgleichung des Vektorpotentials bringt ein weiterer Zusammenhang hervor. Durch beidseitige Anwendung der Rotation folgt mit $\nabla \times (\nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \equiv 0$ aus der Gleichung (1.20)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} + \nabla \times [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})] \quad (1.38)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (1.39)$$

Gleichung (1.39) beinhaltet eine Ergänzung zu der MAXWELL'schen Gleichung

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.40)$$

Mit einem stationären Magnetfeld ($\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$) folgt aus (1.39) auch die fundamentale Induktionsgleichung von FARADAY:

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.41)$$

Kürzlich hat Thomas PHIPPS gezeigt, dass Heinrich Rudolf HERTZ auch eine Änderung der MAXWELL-Gleichung (1.40) vorgeschlagen hat, die heute in Vergessenheit geraten ist:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (1.42)$$

Anstelle der partiellen Ableitung in der MAXWELL-Gleichung (1.40) hat HERTZ das totale Differential verwendet, allerdings diesmal nicht für das Vektorpotential sondern für das \mathbf{B} -Feld.

Die Induktionsgleichung von Cohn

COHN^[4] hat vor einiger Zeit *ad hoc* eine Induktionsgleichung aufgestellt, die nicht aus den MAXWELL'schen Gleichungen abgeleitet werden kann, die aber für viele Anwendungen korrekte (und eindeutige) Antworten zu liefern vermag^[15].

Aus Gleichung (1.39) kann die Gleichung von COHN hergeleitet werden. Dazu werden beide Seiten der Gleichung (1.39) über eine umhüllende Fläche \mathbf{A} integriert:

$$\int \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} + \int \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{A} \quad (1.43)$$

Durch beidseitige Anwendung des Satzes von STOKES wird:

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = U = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} + \oiint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.44)$$

Darin entspricht \mathbf{v} der Geschwindigkeit eines Fluidelements bez. einer Elementarladung gegenüber der Ursache des Vektorpotentials \mathbf{A} bez. der magnetischen Induktion \mathbf{B} , wie das COHN auch verstanden hat. Damit ist die *ad hoc* Gleichung von COHN hergeleitet.

Zusammenfassung

Eine Analyse des Vektorpotentials hat gezeigt, dass für die Herleitung des elektrischen Feldes die totale zeitliche Ableitung anstelle der meistens in Textbüchern verwendeten partiellen Ableitung verwendet werden kann. Im Vergleich zu der traditionellen Gleichung tritt ein zusätzlicher, neuer Term auf, der es vielleicht ermöglichen kann, bisher schwer zu verstehende Vorgänge anschaulicher zu erklären.

Referenzen

- [1] AHARONOV Yakir & David BOHM, „Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory“, *Physical Review* **115** /3 (01 August 1959) 485-491
- [2] BARRETT, Terence W., „Electromagnetic Phenomena not explained by MAXWELL’s Equations“, *World Scientific Publications, Essays on the Formal Aspects of Electromagnetic Theory* (1993)
- [3] BJERKNES, V., „C.A. BJERKNES, sein Leben und seine Arbeit“, *Springer Verlag, Berlin* (1933)
- [4] COHN G.I., „Electromagnetic Induction“, *Electrical Engineer* **68** (1949) 441
- [5] EINSTEIN Albert, „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“, *Annalen der Physik und Chemie* **17** (30. Juni 1905) 891-921
- [6] GALECZKI George, „The Locally Induced Electric Field“, *Apeiron* **7** /3&4 (July-October 2000) 213-216
- [7] von HELMHOLTZ, Hermann, „Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen“, *Crelles Journal* **55** (1858) 25-55
- [8] HUBER Jakob, „Physik aus vektorgeometrischer Sicht“, *Technische Rundschau* Nr. 21, 23, 24 (19. Mai 1972)
- [9] LUGT Hans J., „Wirbelströmung in Natur und Technik“, *Braun Verlag, Karlsruhe* ISBN 3-7650-2028-1 (1979)
- [10] MAXWELL James Clerk, „On FARADAY’s Lines of Force“, *Trans. Cambridge Phil. Society* **10** Part I (1856) 27-83
- [11] MAXWELL James Clerk, „A Treatise on Electricity & Magnetism“, (1873) *Dover Publications, New York* ISBN 0-486-60636-8 (Vol. 1) & 0-486-60637-6 (Vol. 2)
- [12] PHIPPS Thomas E. and Harold Willis MILNES, „Invariant Electromagnetism: Necessity and Sufficiency“,
- [13] PHIPPS Thomas E. Jr, „On Hertz’s Invariant Form of Maxwell’s Equations“, *Physics Essays* **6** /2 (1993) 249-256
- [14] THOMSON Joseph John, „Report on Electrical Theories“, *Report on the 55th Meeting of the British Association for the Advancement of Science* **55** (1885) 97 pp.
- [15] Waser André, „Elektrodynamik von gleichförmig bewegten Ladungen“, www.andre-waser.ch (2000)
- [16] Waser André, „Quaternionen in der Elektrodynamik“, www.andre-waser.ch (2000)