Das totale Zeitdifferential in Bi-Quaternion Elektrodynamik

André Waser*

Erstellt: 18.06.2002
Letzte Änderung: 16.11.2003

In einer früheren Publikation [3] haben wir gezeigt, wie die Grundgleichungen der Elektrodynamik mit Bi-Quaternionen beschrieben werden kann. In dieser Arbeit wird ein anderer Weg zur Herleitung der vier Gleichungen der generellen Lorenzkraft gezeigt, indem ein neuer Operator eingeführt wird: Das totale Differential nach der Zeit in Bi-Quaternion Form.

Einleitung

Bi-Quaternionen sind für eine kompakte Beschreibung der Elektrodynamik sehr nützlich. Ein Bi-Quaternion hat folgende Definition:

$$\mathrm{X} = \mathrm{x}_0 + \mathrm{i}\mathrm{y}_0 + \vec{\boldsymbol{i}} \cdot \left(\vec{\mathbf{x}} + \mathrm{i}\vec{\mathbf{y}} \right) \tag{1}$$

mit

$$\mathrm{i} = \sqrt{-1} \quad \text{and} \quad \vec{\boldsymbol{i}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = i\,\mathrm{x}_1 + j\,\mathrm{x}_2 + k\,\mathrm{x}_3 \tag{2}$$

und

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{3}$$

und

$$\begin{array}{ccc} ij = k & jk = i & ki = j \\ ij = -ji & jk = -kj & ki = -ik\,. \end{array}$$

Das vierdimensionale Bi-Quaternion einer Position ist

$$\mathrm{X} = \mathrm{i}c\mathrm{t} + \vec{\boldsymbol{i}} \cdot \vec{\mathbf{x}} \tag{4}$$

Das vierdimensionale Bi-Quaternion einer Geschwindigkeit ist:

$$\mathrm{V} = \mathrm{i}\mathrm{c} + \vec{\boldsymbol{i}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \tag{5}$$

Das vierdimensionale Bi-Quaternion eines elektromagnetischen Potentials ist:

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{c}}\Phi + \vec{\boldsymbol{i}} \cdot \vec{\mathbf{A}} \tag{6}$$

Das vierdimensionale Bi-Quaternion einer Stromdichte ist:

$$\mathrm{J} = \rho\mathrm{V} = \mathrm{i}\mathrm{c}\rho + \vec{\boldsymbol{i}} \cdot \rho\vec{\mathbf{v}} \tag{7}$$

Das vierdimensionale Bi-Quaternion einer Fraftdichte ist:

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{c}}\mathrm{P} + \vec{\boldsymbol{i}} \cdot \vec{\mathbf{F}} \tag{8}$$

* André Waser, Birchli 35, CH-8840 Einsiedeln

Schließlich werden die räumlichen Bi-Quaternion Differentialoperatoren eingeführt zu:

Nabla : $$\nabla = \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{i}} \cdot \vec{\nabla} \qquad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \tag{9}$$

d'Alembert : $$\Box = \frac{i}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \tag{10}$$

Damit wird die generalisierte Lorentzkraft sehr einfach ausgedrückt zu [3]:

$$F = J\nabla A \tag{11}$$

Nun soll gezeigt werden, das diese Kraftdichte auch mit einem totalen Zeitdifferential in Bi-Quaternion Form hergeleitet werden kann.

Der totale Zeitdifferential Operator in Bi-Quaternion Form

Gegeben sei ein Bi-Quaternion Feld A = A(X), in dem X eine Funktion von Raum und Zeit ist, so dass $A = A(X(t, x_1, x_2, x_3))$. Die totale Ableitung von A nach der Zeit ist dann:

$$dA = \frac{\partial A(X)}{\partial X} dX = \frac{\partial A}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t} dt + \frac{\partial A}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial \vec{\mathbf{x}}} d\vec{\mathbf{x}} = -\left(\frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial X} dt + \frac{\partial X}{\partial \vec{\mathbf{x}}}\frac{\partial A}{\partial X} d\vec{\mathbf{x}}\right) \tag{12}$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial X} = \nabla \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial \vec{\mathbf{x}}} = \vec{\nabla} \tag{13}$$

Expandieren wir nun den Operator im ersten Term in (12) zu

$$\frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial}{\partial X} dt = \left(-\frac{\partial}{\partial t} + ic\,\vec{i} \cdot \vec{\nabla}\right) dt \tag{14}$$

Der Operator im zweiten Term von (12) hat die folgende Erweiterung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial \vec{\mathbf{x}}}\frac{\partial}{\partial X} d\vec{\mathbf{x}} &= \left(\frac{\partial X}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial X}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial X}{\partial x_3} dx_3\right)\frac{\partial}{\partial X} \\
&= \left(i\,dx_1 + j\,dx_2 + k\,dx_3\right)\left(\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial x_1} + j\frac{\partial}{\partial x_2} + k\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&= \vec{i} \cdot d\vec{\mathbf{x}}\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \begin{pmatrix} i\,dx_1 \\ j\,dx_2 \\ k\,dx_3 \end{pmatrix}\left(i\frac{\partial}{\partial x_1} + j\frac{\partial}{\partial x_2} + k\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&= \vec{i} \cdot \left(\frac{i}{c} d\vec{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial t} + d\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\nabla}\right) - d\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\nabla}
\end{aligned} \tag{15}$$

Die Addition von (14) und (15) und die anschließende Division mit dt ergibt das totale Zeitdifferential in Bi-Quaternion Form:

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\nabla}\right) - \vec{i} \cdot \left[\left(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\nabla}\right) + i\left(c\vec{\nabla} + \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right] \tag{16}$$

Überraschender weise ergibt die Multiplikation der Bi-Quaternion Geschwindigkeit mit dem Nabla Operator das selbe Resultat, einfach mit negativem Vorzeichen:

$$V\nabla = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\nabla}\right) + \vec{\boldsymbol{i}}\cdot\left[\left(\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\nabla}\right) + \mathrm{i}\left(c\vec{\nabla} + \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right] \tag{17}$$

Daraus folge die kompakte Gleichung für das totale Bi-Quaternion Differential der Zeit:

$$\boxed{\frac{d}{dt} = -V\nabla} \tag{18}$$

Es ist nun einfach nachzuweisen, dass die Bi-Quaternion Kraftdichte ebenso mit Hilfe obigem totalen Zeitdifferential hergeleitet werden kann:

$$F = J\nabla A = \rho V\nabla A = -\rho\frac{dA}{dt} \tag{19}$$

Gleichung (19) kann in folgende vier Gleichungen zerlegt werden:

$$\begin{aligned}
\rho\vec{\mathbf{v}}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}}\right) &= 0 \\
-\rho\left[\vec{\mathbf{v}}\cdot\left(\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t} + \vec{\nabla}\Phi\right) + c^2\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{A}}\right)\right] &= P \\
-\rho\left[\left(\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t} + \vec{\nabla}\Phi\right) - \vec{\mathbf{v}}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}}\right) + \vec{\mathbf{v}}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{A}}\right)\right] &= \vec{\mathbf{F}} \\
\rho\left[\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}}\right) + \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c^2}\times\left(\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t} + \vec{\nabla}\Phi\right)\right] &= 0
\end{aligned} \tag{20}$$

Ein genauere Untersuchung des vorgeschlagenen totalen Zeitdifferentials (16) zeigt einige bekannte Terme wie beispielsweise das bekannte skalare totale Zeitdifferential. Vor kurzem wurden auch andere totale Zeitdifferentiale für das Vektorpotential **A** von Wesley [4] und von Phipps [2] und also zehn Jahre vorher von Mocanu [1] vorgeschlagen. Alle diese ähnlichen totalen Zeitdifferentiale basieren auf der Separierung von Raum und Zeit, d.h. sie sind nicht konsequent aus einer vierdimensionalen Topologie hergeleitet. Aus der Gleichung (20) können wir zwei Gleichungen für das totale Zeitdifferential des Vektorpotentials ableiten zu:

$$\frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt} = \frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \vec{\mathbf{v}}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}}\right) + \vec{\mathbf{v}}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{A}}\right) \tag{21}$$

oder

$$\frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt} = \frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\nabla}\vec{\mathbf{A}} - \left(\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{\mathbf{A}}\ . \tag{22}$$

Referenzen

[1] Mocanu C.I., “Hertzian Relativistic Electrodynamics and its Associated Mechanics”, *Hadronic Press*, Palm Harbor, FL , **1** (1991) 34-38

[2] PHIPPS Thomas E, “Generalized Total Time Derivatives”, *Apeiron* **7** Nr.1-2 (January-April 2000) 107-110

[3] VAN VLAENDEREN Koen and André WASER, “Generalization of Classical Electrodynamics to Admit a Scalar Field and Longitudinal Waves”, *Hadronic Journal* **24** (2001) 609-628

[4] WESLEY Jean Paul, “ A theorem and proof for the total time derivative of a vector field as seen by a moving point”, *Apeiron* **6** Nr. 3-4 (July-October 1999) 237-238