Biquaternion Relativität -
Gravitation als Effekt räumlich variabler Lichtgeschwindigkeit

André Waser CH-8840 Einsiedeln, Switzerland; waser.andre@bluewin.ch

Die Biquaternion Notation - oder genauer die Semi-Biquaternion Notation - wird für die Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie angewendet. Die Lorentz Transformation sowie die Transformation der Elektromagnetischen Felder sind die Folge einer Multiplikation mit der relativen Biquaternion Geschwindigkeit. Es wird ersichtlich, dass die Biquaternion Geschwindigkeit bezüglich dem Äquivalenzprinzip eine wichtige Rolle einnimmt. Die totale Ableitung der Vierergeschwindigkeit liefert gleichzeitig die Trägheits- und Gravitationsbeschleunigung. In unserem Modell liegt die Ursache der Gravitation in der räumlichen Veränderung (Gradient) der Lichtgeschwindigkeit.

Erstellt am 01. Januar 2011.

1 Einleitung

Ein Hamilton Quaternion $\boldsymbol{q}$ [1] ist eine Erweiterung von reellen Zahlen mit den Hamiltonschen Einheiten i, j, k mit dem Betrag von $\sqrt{-1}$. Sie formen eine Vierer-Zahl gemäss

$$\boldsymbol{q} = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \ ,$$

wobei $q_0 ... q_3$ reelle Zahlen sind. Die Hamiltonschen Einheiten unterliegen der assoziativen aber nicht der kommutativen Multiplikationen

$$\begin{gathered} i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \ , \\ ij = k \ jk = i \ ki = j \ , \\ ij = -ji \ jk = -kj \ ki = -ik \ . \end{gathered}$$

Der Realteil eines Quaternions wird meist als Skalarteil und der Imaginärteil als Vektorteil interpretiert. Beide zusammen formen einen Vierer-Vektor:

$$\boldsymbol{q} = (q_0, \ \vec{q}) \ ,$$

mit $\vec{q} = iq_1 + jq_2 + kq_3$. Mit der Einführung von komplexen Koeffizienten mit der Gauss'schen imaginären Einheit i präsentierte Hamilton später eine Erweiterung der Quaternionen [2].

$$\boldsymbol{Q} = q_0 + \mathrm{i}p_0 + i\,(q_1 + \mathrm{i}p_1) + j\,(q_2 + \mathrm{i}p_2) + k\,(q_3 + \mathrm{i}p_3) \ .$$

Ein Biquaternion kann in zwei Vierervektoren gruppiert werden

$$\boldsymbol{Q} = [(q_0, \ \mathrm{i}\vec{q}) + (\mathrm{i}p_0, \ \vec{p})] = q + p \ .$$

Beide Terme q und p heissen Semi-Biquaternionen. Diese beiden Semi-Biquaternionen haben nicht dieselbe Struktur. Der erste Term ist sehr nützlich um translatorische Vierer-Grössen abzubilden, während der zweite Term eine komplementäre rotierende Vierer-Grösse repräsentieren kann.

Eine vereinfachte Schreibweise ist die Summendarstellung eines 'linken' und 'rechten' Semi-Biquaternions zu

$$\boldsymbol{Q} = q + p = \left[\begin{pmatrix} q_0 \\ \mathrm{i}\vec{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{i}p_0 \\ \vec{p} \end{pmatrix}\right] \ .$$

Die unterschiedlichen Klammern sollen zeigen, dass die beiden Semi-Biquaternionen nicht dieselbe Struktur haben. Die Multiplikation von zwei Biquaternionen

$$\boldsymbol{A} = a + b = \left[\begin{pmatrix} a_0 \\ \mathrm{i}\vec{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{i}b_0 \\ \vec{b} \end{pmatrix}\right]$$

$$\boldsymbol{X} = x + y = \left[\begin{pmatrix} x_0 \\ \mathrm{i}\vec{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{i}y_0 \\ \vec{y} \end{pmatrix}\right]$$

ist

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AX} = \Bigg[& \begin{pmatrix} a_0x_0 - b_0y_0 + \vec{a}\cdot\vec{x} - \vec{b}\cdot\vec{y} \\ \mathrm{i}\left(a_0\vec{x} + x_0\vec{a} + b_0\vec{y} + y_0\vec{b} + \vec{a}\times\vec{y} - \vec{b}\times\vec{x}\right) \end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} \mathrm{i}\left(a_0y_0 + b_0x_0 - \vec{a}\cdot\vec{y} - \vec{b}\cdot\vec{x}\right) \\ a_0\vec{y} + x_0\vec{b} - b_0\vec{x} - y_0\vec{a} - \vec{a}\times\vec{x} + \vec{b}\times\vec{y} \end{pmatrix} \Bigg] \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Die Biquaternion Multiplikation ist nicht kommutativ aber assoziativ. Die Hamilton-Einheiten werden bei der Biquaternion Skalarmultiplikation nicht multipliziert

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = a_0x_0 - \vec{a}\cdot\vec{x} - \left(b_0y_0 - \vec{b}\cdot\vec{y}\right) \ .$$

Daraus folgt für den Betrag eines Biquaternions

$$|\boldsymbol{Q}| = \sqrt{\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}} = \sqrt{a_0^2 - \vec{a}\cdot\vec{a} - \left(b_0^2 - \vec{b}\cdot\vec{b}\right)} \ . \tag{2}$$

Ein Spezialfall liegt vor, wenn das zweite Semi-Biquaternion Null gesetzt wird. Mit $b = 0$ und $\vec{y} = 0$ reduziert sich die Multiplikation von zwei Biquaternionen zu

$$\boldsymbol{AX} = \left[\begin{pmatrix} a_0x_0 + \vec{a}\cdot\vec{x} \\ \mathrm{i}\,(a_0\vec{x} + x_0\vec{a}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\vec{a}\times\vec{x} \end{pmatrix}\right] \ .$$

Aus der Multiplikation von zwei Semi-Biquaternionen resultiert bis auf ein zusätzliches Kreuzprodukt fast wieder ein Semi-Biquaternion.

2 Biquaternion Geschwindigkeit

Vor einiger Zeit haben wir gezeigt, wie solche Biquaternionen zur Elektrodynamik angewendet werden [3]. Der Fokus von diesem Papier liegt in der Mechanik (klassisch und relativistisch). Das Positions-Biquaternion steht für ein Ereignis in der Raumzeit

$$\boldsymbol{X} = \left[\begin{pmatrix} ct \\ \mathrm{i}\vec{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \tag{3}$$

worin die Konstante c die Lichtgeschwindigkeit ist. Mit

$$d\boldsymbol{X} = \left[\begin{pmatrix} cdt \\ \mathrm{i}d\vec{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

und mit dem Eigenzeitintervall $d\tau$

$$d\left|\boldsymbol{X}\right| = \sqrt{c^2(dt)^2 - d\vec{x}\cdot d\vec{x}} = cdt\sqrt{1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{c^2}} = cd\tau\ .$$

folgt die Biquaternion Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{X}}{d\tau} = \gamma\left[\begin{pmatrix} c \\ \mathrm{i}\vec{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \tag{4}$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ .$$

Der Betrag der Biquaternion Geschwindigkeit ist immer c, unabhängig vom Betrag von $\vec{v}$. Damit wird das Einheits-Biquaternion zur Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{V}^0 = \gamma\left[\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i}\frac{\vec{v}}{c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \tag{5}$$

oder

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{d|\boldsymbol{X}|} = \frac{\boldsymbol{V}}{|\boldsymbol{V}|} = \boldsymbol{V}^0\ . \tag{6}$$

Die Inverse einer Einheits-Biquaternion Geschwindigkeit ist seine Bikonjugierte, welche wiederum ein Einheits-Biquaternion ist

$$\frac{1}{\boldsymbol{V}^0} = \boldsymbol{V}^{0*} \tag{7}$$

mit

$$\boldsymbol{V}^{0*} = \gamma\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i}\frac{\vec{v}}{c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\ .$$

3 Biquaternion Lorentz Transformation

S sei ein Inertialsystem mit einem ruhenden Beobachter. Ein anderes Inertialsystem S' bewegt sich gegenüber S mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$. Der Abstand zwischen zwei Ereignissen ist invariant für beide Systeme

$$d|\boldsymbol{X}| = d|\boldsymbol{X}'|\ .$$

Auch das Quadrat dieses Längenelements ist eine Invariante und es gilt

$$d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X} = d\boldsymbol{X}'\cdot d\boldsymbol{X}' = d^2|\boldsymbol{X}| = d^2|\boldsymbol{X}'|\ .$$

Mit Gleichung (6) folgt

$$\boldsymbol{V}^0\cdot\boldsymbol{V}^0 = \frac{d\boldsymbol{X}\cdot d\boldsymbol{X}}{d\boldsymbol{X}'\cdot d\boldsymbol{X}'} \tag{8}$$

Das führt direkt zur Biquaternion Koordinatentransformation von S nach S'

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X}\boldsymbol{V}^{0*} \tag{9}$$

sowie zur Rücktransformation

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}^0\ . \tag{10}$$

Die Vor- und Rückwärtstransformationen sind explizit

$$\boldsymbol{X}' = \left[\begin{pmatrix} ct' \\ \mathrm{i}\vec{x}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \gamma\left[\begin{pmatrix} ct - \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{c} \\ \mathrm{i}\left(\vec{x}-\vec{v}t\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\vec{x}\times\vec{v}}{c} \end{pmatrix}\right] \tag{11}$$

$$\boldsymbol{X} = \left[\begin{pmatrix} ct \\ \mathrm{i}\vec{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \gamma\left[\begin{pmatrix} ct' + \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{c} \\ \mathrm{i}\left(\vec{x}'+\vec{v}t'\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\vec{x}'\times\vec{v}}{c} \end{pmatrix}\right]\ . \tag{12}$$

Aus Gleichung (11) und Gleichung (12) folgt auch

$$\vec{x}\times\vec{v} = 0 \quad \text{and} \quad \vec{x}'\times\vec{v} = 0\ .$$

Die obigen Transformation sind also nur gültig im Spezialfall von kollinearen Vektoren $\vec{x}\|\vec{v}$ und $\vec{x}'\|\vec{v}$. Der allgemeine Fall folgt mittels Transformation des zu $\vec{v}$ parallelen Teils vom Positionsvektor $\boldsymbol{X}$ und der anschliessenden Addition mit dem verbleibenden Teil von $\boldsymbol{X}$ senkrecht zu $\vec{v}$. Mit

$$\boldsymbol{X}_{\|} = \left[\begin{pmatrix} ct \\ \mathrm{i}\left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{v}\frac{\vec{v}}{v}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

ist die allgemeine Vorwärtstransformation

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X}_{\perp} + \boldsymbol{X}_{\|}\boldsymbol{V}^{0*} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_{\|}\left(1-\boldsymbol{V}^{0*}\right)\ , \tag{13}$$

oder explizit

$$\boldsymbol{X}' = \left[\begin{pmatrix} \gamma\left(ct - \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{c}\right) \\ \mathrm{i}\left(\vec{x} - (1-\gamma)\frac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{v}\frac{\vec{v}}{v} - \gamma\vec{v}t\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\ ,$$

und die allgemeine Rückwärtstransformation ist

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}'_{\perp} + \boldsymbol{X}'_{\|}\boldsymbol{V}^0 = \boldsymbol{X}' - \boldsymbol{X}'_{\|}\left(1-\boldsymbol{V}^0\right)\ , \tag{14}$$

oder explizt

$$\boldsymbol{X} = \left[\begin{pmatrix} \gamma\left(ct + \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{c}\right) \\ \mathrm{i}\left(\vec{x}' - (1+\gamma)\frac{\vec{x}'\cdot\vec{v}}{v}\frac{\vec{v}}{v} + \gamma\vec{v}t\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\ .$$

Hiermit wird keine neue Lorentz-Transformation beschrieben. Aber es ist interessant, dass die Lorentz-Transformation mit einer Multiplikation des Position-Biquaternions mit dem Biquaternion der Relativgeschwindigkeit beschrieben werden kann. Die Komponente des Position-Biquaternions parallel zum Geschwindigkeits-Biquaternion ist

$$\left(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{V}^0\right)\boldsymbol{V}^0\ .$$

Dessen Lorentz-Transformation ist

$$\left(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{V}^0\right)\boldsymbol{V}^0\boldsymbol{V}^{0^*} = \gamma\left(ct - \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{c}\right) .$$

Das Ergebnis hat überhaupt keinen räumlichen Vektor und ist in allen Fällen von purem zeitlichen Charakter, d.h. unabhängig der Richtung des räumlichen Positions-Vektors im System S. Deshalb ist die Richtung des Zeitvektors in jedem bewegten System S' für jeden Beobachter in S identisch mit der Richtung $\boldsymbol{V}^0$ der Relativ-Vierergeschwindigkeit.

Um das Additionsgesetz zweier Biquaternion-Geschwindigkeiten zu finden sei $\boldsymbol{V}$ die relative Biquaternion-Geschwindigkeit zwischen S and S', und $\boldsymbol{U}'$ sei die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers gemessen in S'. Die gesamte Biquaternion-Geschwindigkeit $\boldsymbol{W}$ gemessen in S folgt via Rücktransformation von $\boldsymbol{U}'$ zu

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{U}'\boldsymbol{V}^0 = \gamma_u\gamma_v\begin{bmatrix} c + \frac{\vec{u}'\cdot\vec{v}}{c} \\ \mathrm{i}\,(\vec{u}' + \vec{v}) \end{bmatrix} + \gamma_u\gamma_v\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\vec{u}'\times\vec{v}}{c} \end{bmatrix}$$

mit

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \quad \text{and} \quad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} .$$

Etwas Umformen führt direkt zur addierten Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{W} = \gamma_w\left[\begin{pmatrix} c \\ \mathrm{i}\vec{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\vec{w}\times\vec{v}}{c} \end{pmatrix}\right]$$

mit

$$\gamma_w = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}$$

und dem aus der Relativitätstheorie bekannten Additionsgesetz

$$\vec{w} = \frac{\vec{u}' + \vec{v}}{1 + \frac{\vec{u}'\cdot\vec{v}}{c^2}} .$$

Der Betrag von $\boldsymbol{W}$ ist wiederum unabhängig von $\vec{u}$ oder $\vec{v}$ identisch der Lichtgeschwindigkeit c.

4 Biquaternion Feld-Transformationen

Das elektromagnetische Biquaternion Potenzial

$$\boldsymbol{A} \equiv \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{c}\varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \tag{15}$$

wird exakt gleich transformiert wie der Biquaternion-Positionsvektor. Die Vorwärtstransformation

$$\boldsymbol{A}' = \gamma\left[\begin{pmatrix} \frac{\varphi}{c} - \frac{\vec{v}\cdot\vec{A}}{c} \\ \mathrm{i}\left(\vec{A} - \frac{\varphi}{c^2}\vec{v}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\vec{A}\times\vec{v}}{c} \end{pmatrix}\right] ,$$

ist wiederum nur gültig für $\vec{A} \parallel \vec{v}$. Der allgemeine Fall folgt aus

$$\boldsymbol{A}' = \left[\begin{pmatrix} \gamma\left(\frac{\varphi}{c} - \frac{\vec{A}\cdot\vec{v}}{c}\right) \\ \mathrm{i}\left(\vec{A} - (1-\gamma)\frac{\vec{A}\cdot\vec{v}}{v}\frac{\vec{v}}{v} - \gamma\frac{\varphi}{c^2}\vec{v}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] . \tag{16}$$

Die elektromagnetischen Felder folgen aus der Ableitung der Potenzialfelder. Mit der Definition des Biquaternion Differentialoperators

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}} = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] . \tag{17}$$

folgen das elektrischen und magnetische Biquaternion Feld

$$\boldsymbol{E} = c\nabla\boldsymbol{A} = \left[\begin{pmatrix} c\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) \\ \mathrm{i}\vec{E} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c\vec{B} \end{pmatrix}\right] ,$$

$$\boldsymbol{B} = -\mathrm{i}\nabla\boldsymbol{A} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i}\vec{B} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{i}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) \\ -\frac{\vec{E}}{c} \end{pmatrix}\right] ,$$

worin $\boldsymbol{E} = -\mathrm{i}c\boldsymbol{B}$. Mit der Lorentzbedingung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

folgen die elektrischen und magnetischen Biquaternion Felder ohne Skalarteil zu

$$\boldsymbol{E} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i}\vec{E} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c\vec{B} \end{pmatrix}\right] , \tag{18}$$

$$\boldsymbol{B} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i}\vec{B} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\vec{E}}{c} \end{pmatrix}\right] . \tag{19}$$

Mit dem elektrischen Biquaternion Feld (18) ist die Vorwärtstransformation

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}' &= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i}\vec{E}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{B}' \end{pmatrix}\right] \\ &= \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{V}^{0^*} = \gamma\left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{E} \\ \mathrm{i}\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} \vec{v}\cdot\vec{B} \\ -\frac{\vec{E}}{c} \end{pmatrix}\right] . \end{aligned} \tag{20}$$

Diese Transformation ist offenbar nur anwendbar für

$$\vec{v}\cdot\vec{E} = 0 \quad \text{and} \quad \vec{v}\cdot\vec{B} = 0 .$$

Nur die Feldkomponenten senkrecht zu $\vec{v}$ werden transformiert, nicht aber die kollinearen Feldkomponenten zu $\vec{v}$. Mit

$$\boldsymbol{E}_{\parallel} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{E}}{v}\frac{\vec{v}}{v}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

finden wir die allgemeine Transformation zu

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}_{\parallel} + \boldsymbol{E}_{\perp}\,\boldsymbol{V}^{0^*} = \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{V}^{0^*} + \boldsymbol{E}_{\parallel}\left(1 - \boldsymbol{V}^{0^*}\right) . \tag{21}$$

5 Totale Biquaternion Ableitung nach der Zeit

Mit einem beliebigen Biquaternion-Feld

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{pmatrix} a_0 \\ \mathrm{i}\vec{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

abhängig von einem Biquaternion Position

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}(ct,\ x_1,\ x_2,\ x_3))\ ,$$

ist die totale zeitliche Ableitung

$$d\boldsymbol{A} = \frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}} d\boldsymbol{X} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{X}}\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \vec{x}} d\vec{x}\ .$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}} = \nabla \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial \vec{x}} = \vec{\nabla}$$

folgt nach einigen Berechnungen

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla} \\ \mathrm{i}\left(c\vec{\nabla} + \frac{\vec{v}}{c}\circ\frac{\partial}{\partial t}\right)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\vec{v}\circ\vec{\nabla}\end{pmatrix}\right]\boldsymbol{A}\ ,$$

wobei das Symbol $\circ$ bedeutet, dass für den Skalarteil das Skalarprodukt und für den Vektorteil das Kreuzprodukt verwendet werden muss. Das wird explizit

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial a_0}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}a_0 + c\vec{\nabla}\cdot\vec{a} + \vec{v}\cdot\frac{\vec{a}}{\partial t} \\ \mathrm{i}\left(\frac{\partial\vec{a}}{\partial t} + \vec{v}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right) + c\vec{\nabla}a_0 + \frac{\vec{v}}{c}\frac{\partial a_0}{\partial t} - \vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)\right)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{i}\vec{v}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) \\ -c\vec{\nabla}\times\vec{a} - \vec{v}\times\left(\frac{\partial\vec{a}}{c\partial t} + \vec{\nabla}a_0\right)\end{pmatrix}\right]\ . \tag{22}$$

Interessanterweise ist das komplett equivalent zu

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{V}\nabla\boldsymbol{A}$$

und der Biquaternion Operator für die relativistische totale Ableitung nach der Zeit ist

$$\frac{d}{d\tau} = \boldsymbol{V}\nabla\ . \tag{23}$$

6 Biquaternion Beschleunigung und Kraft

Mit $c =$ konstant und der relativistischen Beschleunigung

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{24}$$

kann die relativistische Biquaternion Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ direkt abgeleitet werden zu

$$\boldsymbol{a} \equiv \begin{bmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ \mathrm{i}\vec{a}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}\end{bmatrix} = \frac{d\boldsymbol{V}}{d\tau} = \begin{bmatrix}\begin{pmatrix} \gamma^4\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c} \\ \mathrm{i}\gamma^2\left(\gamma^2\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}\frac{\vec{v}}{c} + \vec{a}\right)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}\end{bmatrix}\ .$$

Anstatt Gleichung (24) zu nutzen kann der Operator (23) angewendet werden

$$\boldsymbol{a} \equiv \frac{d\boldsymbol{V}}{d\tau} = \boldsymbol{V}\nabla\boldsymbol{V}\ . \tag{25}$$

In diesem Aufsatz wollen wir diese Gleichung nicht für relativistische Geschwindigkeiten untersuchen. Mit der nicht-relativistischen Geschwindigkeit $\boldsymbol{U}$ wird die Beschleunigung

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{U}}{dt} = \boldsymbol{U}\nabla\boldsymbol{U} \quad \text{with} \quad \boldsymbol{U} \equiv \begin{bmatrix}\begin{pmatrix} c \\ \mathrm{i}\frac{c_0}{c}\vec{v}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}\end{bmatrix}\ .$$

Die Biquaternion Kraft um eine Masse mit nicht-relativistischen Geschwindigkeiten zu beschleunigen ist dann

$$\boldsymbol{F} \equiv m\boldsymbol{a} = m\begin{bmatrix}\begin{pmatrix} P \\ \mathrm{i}\vec{F}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c\vec{\Omega}\end{pmatrix}\end{bmatrix}\ , \tag{26}$$

oder explizit

$$\boldsymbol{F} = m\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}c + c\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{\vec{v}}{\partial t} \\ \mathrm{i}\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) + c\vec{\nabla}c + \frac{\vec{v}}{c}\frac{\partial c}{\partial t} - \vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)\right)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{i}\vec{v}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right) \\ -c\vec{\nabla}\times\vec{v} - \vec{v}\times\left(\frac{\partial\vec{v}}{c\partial t} + \vec{\nabla}c\right)\end{pmatrix}\right]\ . \tag{27}$$

Die nicht-relativistische Kraft $\vec{F}$ wird

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) - \vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right) + c\vec{\nabla}c + \frac{\vec{v}}{c}\frac{\partial c}{\partial t}\ . \tag{28}$$

Mit $c =$ konstant und Austausch des zweiten Terms durch eine Vektoridentität folgt

$$\vec{a} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)\ ,$$

was mit der bekannten Beschleunigung in der Fluidmechanik übereinstimmt [4].

7 Gravitationspotenzial

In Gleichung (28) finden wir zwei weitere Terme von speziellem Interesse:

$$\vec{F} \sim c\vec{\nabla}c + \frac{\vec{v}}{c}\frac{\partial c}{\partial t}\ .$$

Mit $c =$ konstant, also unabhängig von Raum und Zeit, wären beide Terme Null. Doch es existieren bereits Theorien mit variabler Lichtgeschwindigkeit. Sie wurden eingeführt, um das Horizontproblem in der Kosmologie zu erklären und eine Alternative zur kosmischen Inflation anzubieten (siehe z.B. [5] und Referenzen darin). Wir nehmen nun an, dass c=$c(\vec{x})$ ist. Um weiterhin ein Viererraum $(x_0, \vec{x})$ mit vier unabhängigen Dimensionen zu haben, muss das Zeitintervall dx_0 unabhängig vom Raumintervall $d\vec{x}$ sein und umgekehrt. Mit $c \neq$ konstant soll das Intervall dx_0 invariant zur lokalen Lichtgeschwindigkeit sein. Also ist

$$dx_0 = c_0 dt = c dt_c\ ,$$

worin c_0 die konstante Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Das Zeitintervall in einer Region $c \neq$ konstant ändert nun gemäss

$$dt_c = \frac{c_0}{c}dt\ . \tag{29}$$

Damit ist das Intervall der Zeitdimension x_0 unabhängig von c. Die Geschwindigkeit in einer Region mit $c \neq$ konstant wird mit dem lokalen Zeitintervall gemessen

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt_c} = \frac{c}{c_0}\frac{d\vec{x}}{dt}\ .$$

Das erfüllt das Kausalitätsprinzip, denn die lokale Geschwindigkeit $\vec{v}$ kann nicht höher sein als die Lichtgeschwindigkeit c. Das invariante Längenelement im Viererraum ist nun

$$d\boldsymbol{X}_c = dt\left[\begin{pmatrix} c \\ \mathrm{i}\frac{c_0}{c}\vec{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = cdt\sqrt{1 - \frac{c_0^2}{c^4}v^2} = cd\tau_c \tag{30}$$

und die Biquaternion Geschwindigkeit (4) ändert zu

$$\boldsymbol{V}_c = \frac{d\boldsymbol{X}_c}{d\tau_c} = \gamma_c\left[\begin{pmatrix} c \\ \mathrm{i}\frac{c_0}{c}\vec{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \tag{31}$$

mit

$$\gamma_c = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c_0^2}{c^4}v^2}} .$$

Der Biquaternion Differentialoperator (17) ändert ebenfalls zu

$$\nabla_c \equiv \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}_c} = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] , \tag{32}$$

worin c keine Konstante mehr ist. Der Operator zur totalen Ableitung nach der Zeit (23) ändert ebenfalls zu

$$\frac{d}{d\tau_c} = \boldsymbol{V}_c\,\nabla_c . \tag{33}$$

Die Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ einer nicht-relativistischen Geschwindigkeit $\boldsymbol{U}$ kann geschrieben werden zu

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{U}}{dt} = \boldsymbol{U}\nabla\boldsymbol{U} \approx \boldsymbol{V}_c\nabla_c\boldsymbol{V}_c = \frac{d\boldsymbol{V}_c}{d\tau_c} = \boldsymbol{a}_c .$$

Das entspricht weiterhin Gleichung (27) für den nicht-relativistischen Fall. Die Trägheitskraft der Masse m wird einfach $\boldsymbol{F}_g = -m\boldsymbol{a}$. Für Ableitungen von c kann obige Gleichung weiter reduziert werden zu

$$\boldsymbol{g} = \frac{dc}{dt} = \boldsymbol{U}\nabla c . \tag{34}$$

Die auf einem Masse m wirkende Trägheitskraft $\boldsymbol{F}_g$ ist dann

$$\boldsymbol{F}_g = -m\boldsymbol{g} = -mc\vec{\nabla}c - m\frac{\vec{v}}{c}\frac{\partial c}{\partial t} .$$

Mit zeitlich konstantem c reduziert obige Gleichung weiter zu

$$\boldsymbol{F}_g = -mc\vec{\nabla}c = -m\nabla\frac{c^2}{2} = -m\nabla\phi . \tag{35}$$

Der Skalar ϕ kann als Gravitationspotenzial einer Masse M mit der Einheit $[m^2/s^2]$ interpretiert werden zu

$$\phi(\vec{r}) = \frac{c(M,\vec{r})^2}{2} . \tag{36}$$

In unserem Modell wird die nicht relativistische, potenzielle Gravitationsenergie einer Masse m in einem Gravitationsfeld ϕ

$$V = m\phi = \frac{1}{2}mc^2 , \tag{37}$$

was als 'kinetische Energie' einer Masse m mit lokaler Lichtgeschwindigkeit c entlang der Zeitkoordinate x_0 interpretiert werden kann.

8 Gravitation eines Zweikörpersystems

In einem System mit zwei Punktmassen $M \gg m$, wo M die Zentralmasse, m die umlaufende Masse und ϕ das Gravitationspotenzial von M ist, soll die Lichtgeschwindigkeit eine Funktion von M sowie vom Abstand $\vec{r}$ (gemessen von M zu m) sein, also

$$c = c_0 f(M,\vec{r}) .$$

Die Funktion $f(M,\vec{r})$ muss diese Randbedingungen erfüllen:

- $0 \le f(M,\vec{r}) \le 1$ for $0 \le r \le \infty$, und
- $f(M,\vec{r}) = 1$ with $r \to \infty$, und
- der Gradient von c muss unterhalb der heutigen Messgenauigkeit zur Lichtgeschwindigkeit sein.

In ebenen Kugelkoordinaten mit radialer Symmetrie und M im Ursprung folgt für die Trägheitskraft $\boldsymbol{F}_g$ der Masse m

$$\boldsymbol{F}_g = -mc\vec{\nabla}c = mc_0^2 f(M,r)\frac{\partial f(M,r)}{\partial\vec{r}} ,$$

wobei r der Abstand gemessen von M zu m ist. Obige Gleichung soll Newtons Gravitationskraft entsprechen

$$\boldsymbol{F}_g = -G\frac{Mm_c}{r^2}\vec{r}^0 .$$

Hier wurde die Masse m_c verwendet, weil - mit der Energie-Impuls Erhaltung - sich auch die Masse im Gravitationsfeld mit $f(M,\vec{r})$ ändert zu

$$E = \gamma_c mc^2 \approx mc^2 = mc_0^2 f^2(M,r) = m_c c_0^2 . \tag{38}$$

Also ist

$$mc_0^2 f(M,r)\frac{\partial f(M,r)}{\partial\vec{r}} = -G\frac{Mm}{r^2}f^2(M,r)\vec{r}^0 .$$

Durch Integration und Anwenden obiger Randbedingungen folgt die explizite Lösung

$$f(M,r) = e^{-\frac{GM}{c_0^2 r}} ,$$

und die räumliche Änderung der Lichtgeschwindigkeit um M

$$c(M,r) = c_0\,e^{-\frac{GM}{c_0^2 r}} = e^{-\frac{r_S}{2r}} , \tag{39}$$

mit dem Schwarzschild Radius r_S. Dieselbe räumliche Abhängigkeit von c wurde von Puthoff vorgeschlagen [6]. Newtons Gravitationsgesetz ändert sich damit geringfügig zu

$$\boldsymbol{F}_g = -G\frac{Mm_c}{r^2}e^{-\frac{GM}{c_0^2 r}}\vec{r}^0 \quad \text{with} \quad \vec{r} = \vec{r}_m - \vec{r}_M .$$

Für r$\gg r_S$ ist die Abweichung zu $1/r^2$ weit ausserhalb heutiger Messmöglichkeiten, aber unterhalb r_S dreht die Gravitation zwischen zwei Punktmassen zu Null statt nach unendlich.

Mit (39) und den ersten Termen der zugehörigen Taylorreihe wird die Gesamtenergie einer Masse m ungefähr

$$E = \gamma_c mc^2 = \gamma_c mc_0^2\,e^{\frac{-GM}{c_0 r}} \approx mc_0^2 + \frac{1}{2}mv^2 - m\frac{GM}{r} + \ldots ,$$

worin der letzte Term die traditionelle potenzielle Gravitationsenergie von m im Gravitationsfeld von M repräsentiert.

9 Planetenbahn mit neuem Gravitationspotenzial

Die Biquaternion Trägheit ist

$$\boldsymbol{p}_c = m\boldsymbol{V}_c = m\left[\begin{pmatrix} c \\ \mathrm{i}\frac{c_0}{c}\vec{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] . \tag{40}$$

Für konstante Lichtgeschwindigkeit ist der Betrag jeder Vierergeschwindigkeit konstant c und der Betrag vom Viererimpuls eines Körpers mit Masse m bleibt erhalten. Bei Anwesenheit von Gravitation soll der Viererimpuls weiterhin erhalten sein. Erreicht wird das durch Gleichsetzen der Beträge der Vierergeschwindigkeit ohne und mit Gravitationsfeld. Wir starten mit dem Betrags-Quadrat der Vierergeschwindigkeit

$$c_0^2 = \gamma_c^2 \left(c^2 - \frac{c_0^2}{c^2} v^2\right) .$$

Mit (39) folgt für nicht-relativistische Geschwindigkeiten

$$mc_0^2 = mc_0^2\, e^{-\frac{GM}{c_0^2 r}} - mv^2\, e^{\frac{GM}{c_0^2 r}} .$$

Mit ebenen Polarkoordinaten (r: Radius, φ: Drehwinkel) und durch Ersetzen der Exponentialfunktionen mit den ersten Termen ihrer Taylorreihe folgt

$$mc_0^2 = mc_0^2\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) - m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} .$$

Für radialsymmetrische und isotropische Bedingungen wird daraus

$$m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{mr^2} - \frac{L^2}{mr^2}\frac{r_S}{r} - mc_0^2\frac{r_S}{r} = mc_0^2\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^2 - mc_0^2 ,$$

wobei das Drehmoment $L = mr^2\dot{\varphi}$ benützt wurde. Für Zentralkraftfelder bleibt das Drehmoment erhalten. Mit der potenziellen Energie folgt schliesslich

$$E = mc^2 \approx mc_0^2\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)$$

die aus der Relativitätstheorie bekannte Bewegungsgleichung für m um M zu

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{L^2 M}{mc_0^2 r^3} = \frac{E^2}{2mc_0^2} - \frac{mc_0^2}{2} . \tag{41}$$

Die Perihel-Präzession kann daraus auf die bekannte Weise berechnet werden. Mit dem vierdimensionalen Längenelement (30) zusammen mit Gleichung (39) - woraus wieder nur die ersten Terme ihrer Taylorserien benützt werden - folgt schliesslich

$$dX^2 = dt^2 c_0^2\left(1 - \frac{2GM}{c_0^2 r}\right) - dx^2\left(1 - \frac{2GM}{c_0^2 r}\right)^{-1} .$$

In Polarkoordinaten und mit radialer Symmetrie und isotropischen Bedingungen folgt direkt die Schwarzschildmetrik

$$dX^2 = dt^2 c_0^2\left(1 - \frac{2GM}{c_0^2 r}\right) - dr^2\left(1 - \frac{2GM}{c_0^2 r}\right)^{-1} - r^2 d\varphi^2 - r^2 \sin^2\varphi d\theta . \tag{42}$$

10 Gravitation Zeitdilatation und Rotverschiebung

Durch Taylorentwicklung von Gleichung (39) in (29) folgt die Zeitdilatation im Gravitationsfeld von M als Näherung

$$dt_c = e^{-\frac{GM}{c_0^2 r}}\, dt_0 \approx \left(1 - \frac{GM}{c_0^2 r}\right) dt_0 \approx \sqrt{1 - \frac{2GM}{c_0^2 r}}\, dt_0 . \tag{43}$$

Die Definition der gravitativen Rotverschiebung ist

$$z = \frac{\lambda_0}{\lambda_c} - 1 ,$$

worin die Wellenlänge λ_0 in grossem Abstand und λ_c nahe zur gravitationsfelderzeugenden Masse M gemessen wird. Im näheren Punkt ist üblicherweise die Lichtquelle (die Sonne oder ein anderer Himmelskörper) und der entferntere Punkt ist der Ort der Messung (Erde). Zur Vereinfachung soll der radiale Abstand r zwischen den zwei Punkten konstant sein. Nach (38) ändert die Energie der Photonen entlang dieses Weges nicht. Deshalb muss die Frequenz an beiden Punkten identisch sein (also kein Doppler-Effekt). Mit $\lambda = c/\nu$ folgt direkt

$$z = \frac{c_0}{c} - 1 = \frac{1}{e^{-\frac{GM}{c_0^2 r}}} - 1 \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}} - 1 . \tag{44}$$

Das ist die aus der Generellen Relativitätstheorie bekannte gravitative Rotverschiebung. In unserem Modell ist die Photonfrequenz und damit die Photonenergie konstant, dafür ändert die Lichtgeschwindigkeit entlang des Weges.

11 Allgemeine Biquaternion Trägheit und Gravitation

Eine Verallgemeinerung wird erreicht durch konsequente Interpretation der Vierergeschwindigkeit $\boldsymbol{V}_c$ als 'Potenzialfeld für Trägheit und Gravitation'.

Mit der Ableitung der Vierergeschwindigkeit $\boldsymbol{V}_c$

$$\nabla_c \boldsymbol{V}_c = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{u} \\ \mathrm{i}\left(\vec{\nabla}c + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{u} \end{pmatrix}\right] . \tag{45}$$

und mit den Substitutionen

$$g_0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot\vec{u}$$
$$\vec{g} = -c\vec{\nabla}c - \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}$$
$$\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times\vec{u}$$

wird ein Biquaternion 'Beschleunigungsfeld' gefunden

$$\boldsymbol{g} = -c\nabla\boldsymbol{U} = \left[\begin{pmatrix} cg_0 \\ \mathrm{i}\vec{g} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c\vec{\omega} \end{pmatrix}\right] . \tag{46}$$

Die Ähnlichkeit zwischen $\vec{g}$ und dem elektrischen Feld $\vec{E}$ wie auch zwischen $\vec{\omega}$ und der magnetischen Induktion $\vec{B}$ ist offensichtlich. Das Feld $\vec{g}$ ist ein Beschleunigungsfeld und $\vec{\omega}$ kann als Spin- oder Rotationsfeld visualisiert werden.

Mit dem Biquaternion d'Alembert Operator

$$\Delta_c \equiv |\nabla_c|^2 = \nabla_c^* \nabla_c = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \tag{47}$$

kann Gleichung (45) weiter entwickelt werden zu

$$\nabla_c^* \nabla_c \boldsymbol{V}_c = \frac{G}{c^2}\boldsymbol{P} = \frac{G}{c^2}\rho \boldsymbol{V}_c \ ,$$

worin G die Gravitationskonstante, ρ die Massendichte und $\boldsymbol{P}$ die Biquaternion Impulsdichte ist

$$\boldsymbol{P} \equiv \rho \boldsymbol{V}_c = \rho \left[\begin{pmatrix} c \\ \mathrm{i}\frac{c_0}{c}\vec{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \quad \text{with} \quad \rho = \gamma_c \rho_0 \ . \tag{48}$$

Mit der 'kinetischen Lorentzbedingung' g_0=*0* resultieren vier Gleichungen ähnlich den Maxwell-Gleichungen zu

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} &= 0 \ , \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{g} &= G\rho \ , \\ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{g} &= 0 \ , \\ \vec{\nabla} \times \vec{\omega} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} &= \frac{G}{c^2}\rho \vec{u} \ . \end{aligned}$$

Die weitere Analyse dieser Gleichungen ist nicht Teil dieses Aufsatzes. Sie könnten interessant sein für Fluidmechanik oder Kosmologie, zum Beispiel zur Analyse von grossen kosmischen Strukturen. Mit

$$\Delta \boldsymbol{V}_c = \frac{G}{c^2}\rho \boldsymbol{V}_c \quad \text{and} \quad g_0 = 0$$

folgen die inhomogenen Wellengleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} - \vec{\nabla}^2 \vec{g} &= -\frac{G}{c^2}\left(\vec{\nabla}(\rho c) + \frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t}\right) \ , \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \vec{\nabla}^2 \vec{\omega} &= \frac{G}{c^2}\vec{\nabla} \times (\rho \vec{u}) \ . \end{aligned}$$

In Abwesenheit von Massen folgen daraus die homogenen Wellengleichungen und als Ergebnis davon die Vorhersage von transversalen Gravitationswellen mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c.

12 Elektrisches Feld einer Punktladung

Weil c nicht konstant ist muss sich mit c auch die Vakuum Permittivität ϵ_0 und Permeabilität μ_0 verändern

$$c_0^2 f^2(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x})}{\epsilon_0}\frac{f(\vec{x})}{\mu_0} \ .$$

Beide Vakuumparameter ϵ_0 und μ_0 ändern umgekehrt proportional zu c, wobei die Vakuumimpedanz konstant bleibt [6]. Das elektrische Potenzial einer Punktladung ist z.B.

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{Gm}{c_0^2 r}} \vec{r}^0$$

mit m als Ruhemasse des Teilchens. Um das elektrische Feld der Punktmasse zu finden, ist das modifizierte Biquaternion Potenzial

$$\boldsymbol{A} \equiv \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{c}\varphi \\ \mathrm{i}\vec{A} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \quad \text{with} \quad c = c_0 f(\vec{x}) \ . \tag{49}$$

benötigt. Das elektrische Biquaternion-Feld folgt direkt zu

$$\boldsymbol{E} = -c\nabla \boldsymbol{A} = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \frac{\varphi}{c^2}\frac{\partial c}{\partial t} \\ \mathrm{i}\left(\vec{\nabla}\varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\varphi}{c}\vec{\nabla}c\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c\vec{\nabla}\times\vec{A} \end{pmatrix}\right]$$

und das elektrische Feld eines elektrischen Potenzials φ zu

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi + \frac{\varphi}{c}\vec{\nabla}c \ .$$

Für eine Punktladung wird das im speziellen

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} e^{-\frac{Gm}{c_0^2 r}} \vec{r}^0 \ . \tag{50}$$

Das elektrische Feld einer Punktladung hat dieselbe Charakteristik wie sein Gravitationsfeld.

13 Zusammenfassung

Die Beschreibung physikalischer Grössen mit Biquaternionen ist nicht essentiell an sich, doch es erlaubt eine direktere und 'intuitive' Annäherung an physikalische Modelle mit 'natürlichen Zahlen', wobei nur arithmetische Grundoperationen und etwas Differentialrechnung nötig ist.

Die Vierergeschwindigkeit spielt eine Schlüsselrolle um die Relativität, Feldtransformationen, die Energie- und Impulserhaltung sowie Gravitation zu verstehen.

In unserem Modell ist die Lichtgeschwindigkeit c nicht konstant sondern abhängig von Massen (lokalen Energiedichten). Wie wir grob gezeigt haben, bietet das Modell eine Alternative um die Ursache der Gravitation zu verstehen. Das Äquivalenzprinzip, das die Grundlage zur Allgemeinen Relativitätstheorie legte, wird verallgemeinert mit einem - sagen wir - Identitätsprinzip. Trägheit und Gravitation haben beide ihre identische Ursache in der totalen Zeitableitung der Vierergeschwindigkeit.

Erstellt am 01. Januar 2011.

Referenzen

1. Hamilton W. R. "On a new Species of Imaginary Quantities connected with a theory of Quaternions", *Proceedings of the Royal Irish Academy* **2** (Nov 13, 1843) 424–434
2. Hamilton W. R. "Lectures on Quaternions", Macmillan & Co, Cornell University Library (1853)
3. van Flanderen K. J., Waser A. "Generalisation of Classical Electrodynamics to Admit a Scalar Field and Longitudinal Waves", *Hadronic Journal* **24** (2001) 609–628
4. Truckenbrodt E. "Fluidmechanik", Springer Verlag Berlin, 4. Auflage (1996) 73
5. Ellis G. F. R. "Note on Varing Speed of Light Cosmologies", arXiv: astro-ph/0703751v1 (Feb 05, 2008)
6. Puthoff H. E. "Polarizable-Vacuum (PV) Approach to General Relativity", *Foundations of Physics* **32**/6 (Jun 2002) 927-943