Anwendung von Bi-Quaternionen in der Physik

André Waser*

Erste Version: 29.07.2000
Letzte Überarbeitung: 06.05.2007

Nachfolgend wird eine neue Bi-Quaternion-Notation eingeführt und an der Elektrodynamik angewendet. Es folgt daraus ein Set von erweiterten MAXWELL'schen Gleichungen und anderen fundamentalen Gleichungen der Elektrodynamik, die alle mit der LORENTZ-Bedingung übergehen in die klassische Form.

Darüber hinaus erlauben Bi-Quaternionen eine kompakte Formulierung der SRT. Bi-Quaternionen können auch in der Mechanik (Dynamik) und in anderen Disziplinen der Physik angewendet werden.

Einleitung

Eine der größten emotionalen Auseinandersetzungen im späten neunzehnten Jahrhundert war über die mathematische Notation für die Gleichungen der Elektrodynamik[2]. Die heutige Vektor-Notation war zu dieser Zeit noch nicht voll entwickelt und einige Physiker – unter ihnen war auch James Clerk MAXWELL – waren von der Quaternion-Notation überzeugt. Das Quaternion wurde 1843 von Sir William Rowan HAMILTON[6] „erfunden". Peter Guthrie TAIT[11] war der größte Verfechter der Quaternionen. Anderseits haben sich Oliver HEAVISIDE[7] und Josiah Willard GIBBS[13] unabhängig voneinander entschieden, dass sie einen Teil des Quaternions besser für Berechnungen nutzen konnten als das gesamte Quaternion, weshalb sie mit dem weitergerechnet haben, was heute als Vektoralgebra bekannt ist. Vor EINSTEIN wurden praktisch alle Berechnungen mit dreidimensionalen Vektoren durchgeführt. Das Quaternion ist aber eine vierdimensionale Zahl. Um nun das Quaternion für die ursprünglich dreidimensionale Elektrodynamik von MAXWELL brauchbar zu machen, haben Hamilton und Tait vor den skalaren Teil des Quaternions das Zeichen ‚S.' und vor den vektoriellen Teil das Zeichen ‚V.' angebracht, das Quaternion wurde ‚vektorisiert'. Diese Notation hat dann MAXWELL[9] auch in seiner *Treatise* verwendet, worin er etliche Gleichungen mit dieser Schreibweise publiziert hatte. Darin führte MAXWELL keine Berechnungen mit Quaternionen durch sondern präsentierte nur die Schlußergebnisse in der ‚vektorisierten' Quaternion Form. Die Quaternion-Notation stellte sich gegenüber der Vektornotation nicht als nützlich heraus.

Bereits vor einiger Zeit haben wir gezeigt[1], dass die Elektrodynamik erst mit der Einführung von Bi-Quaternion – einer komplexen Erweiterung von Quaternionen – kompakt und im Sinne von TAIT in der Elektrodynamik angewendet werden können. Nachfolgende Arbeit ist eine Weiterführung dieser Gedanken und zeigt und universelle Einsetzbarkeit von Bi-Quaternionen in der Physik auf.

* André Waser, Birchli 35, CH-8840 Einsiedeln

copyright © (2007) by André Waser; www.andre-waser.ch

HAMILTON's Quaternionen

Ein HAMILTON'sches Quaternion hat einen (realen) Skalarteil und einen (imaginären) Vektorteil. Im unteren Beispiel ist ‚a' der Skalarteil und 'bi + cj + dk' der Vektorteil.

$$Q = a + bi + cj + dk \tag{1.1}$$

Darin sind a, b, c und d reelle Zahlen und i, j, k sind die sogenannten HAMILTON'schen Einheitsvektoren mit dem Betrag von $\sqrt{-1}$. Diese erfüllen die Gleichungen

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{1.2}$$

$$\begin{matrix} ij = k & jk = i & ki = j \\ ij = -ji & jk = -kj & ki = -ik \end{matrix}$$

Eine schöne Erklärung über die Rotationseigenschaften der HAMILTON'schen Einheitsvektoren in einem dreidimensionalen ARGAND Diagram wurde von GOUGH[5] publiziert.

Ein Quaternion ist eine hyperkomplexe Zahl. Der Radius (Betrag) des Quaternions im vierdimensionalen Raum ist ähnlich definiert wie für gewöhnliche komplexe Zahlen (Walker[12]):

$$|Q| \equiv \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{1.3}$$

Mit der Einführung eines konjugierten Quaternions

$$Q^* = a - bi - cj - dk \tag{1.4}$$

folgt für den Betrag eines Quaternions auch

$$|Q| \equiv \sqrt{QQ^*} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \ . \tag{1.5}$$

Das vierdimensionale Quaternion eignet sich gut zur Darstellung eines Ereignisses im vierdimensionalen Raum:

$$X = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \ . \tag{1.6}$$

Ab hier benützen wir folgende **Konvention der Indizes und Einheitsvektoren**:

- Index k = 1, 2, 3
- Index j = 0, 1, 2, 3 = 0, k
- Die Einheitsvektoren im dreidimensionalen Raum sind $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 = \vec{e}_k$
- Die HAMILTON'schen Einheiten i, j, k sind in *kursiver* Schrift
- und die imaginäre Einheit $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ in Normalschrift.

Fassen wir damit die HAMILTON'schen Einheiten und die Einheitsvektoren zusammen zu

$$\vec{i} \equiv \left(i\,\vec{e}_1,\ j\,\vec{e}_2,\ k\,\vec{e}_3\right) \tag{1.7}$$

dann können wir für ein Quaternion X_j auch schreiben

$$X_j = x_0 + \vec{i} \cdot \vec{x}_k \tag{1.8}$$

copyright © (2007) by André Waser; www.andre-waser.ch

Rechenregeln mit Quaternionen

Wir haben die zwei Quaternionen

$$X = \left(x_0 + \vec{i} \cdot \vec{x}\right) \text{ und } Y = \left(y_0 + \vec{i} \cdot \vec{y}\right) \;.$$

Ein konjugiertes Quaternion X^* ist dann:

$$X^* = \left(x_0 - \vec{i} \cdot \vec{x}\right) \tag{1.9}$$

Das Skalarprodukt X·Y ist:

$$X \cdot Y = Y \cdot X = \left(x_0 y_0 + \vec{x} \cdot \vec{y}\right) \tag{1.10}$$

Die Multiplikation XY ist:

$$\begin{aligned} XY &= \left(x_0 y_0 - \vec{x} \cdot \vec{y}\right) + \vec{i} \cdot \left(x_0 \vec{y} + \vec{x} y_0 + \vec{x} \times \vec{y}\right) \\ YX &= \left(x_0 y_0 - \vec{x} \cdot \vec{y}\right) + \vec{i} \cdot \left(x_0 \vec{y} + \vec{x} y_0 - \vec{x} \times \vec{y}\right) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Der Betrag des Quaternions X ist:

$$\left|X\right| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_0^2 + \vec{x} \cdot \vec{x}} \tag{1.12}$$

Dann gilt auch

$$XX^* = X^* X = x_0^2 + \vec{x} \cdot \vec{x} = \left|X\right| = X \cdot X \tag{1.13}$$

Der Kehrwert X^{-1} ist

$$\frac{1}{X} = \frac{X^*}{XX^*} = \frac{X^*}{\left|X\right|^2} = \frac{x_0 - \vec{i} \cdot i\vec{x}}{x_0^2 + \vec{x} \cdot \vec{x}} \tag{1.14}$$

Die Division Y/X ist:

$$\frac{Y}{X} = \frac{YX^*}{XX^*} = \frac{\left(y_0 + \vec{i} \cdot i\vec{y}\right)\left(x_0 - \vec{i} \cdot i\vec{x}\right)}{x_0 y_0 + \vec{x} \cdot \vec{x}} \tag{1.15}$$

Einführung von Bi-Quaternionen

Eine Erweiterung der Quaternionen zu achtdimensionalen Zahlen kann dadurch erreicht werden, dass die Variablen a, b, c, d neu nicht reelle sondern komplexe Zahlen sind. Ein (komplexes) Quaternion – oder Bi-Quaternion – ist dann:

$$\mathbb{X} = \left(x_0 + i x^0\right) + \vec{i} \cdot \left(i\vec{x}_k + \vec{x}^k\right) \tag{1.16}$$

Diese Zahl unterscheidet sich vom Oktinion (bekannt aus der LIE-Algebra) dadurch, dass weiterhin die HAMILTON'schen Einheiten *i*, *j*, *k* alleine gültig sind und keine weitere vier Einheiten hinzugefügt werden. Ein Bi-Quaternion kann als eine Zahl von zwei sich überlagernden, vierdimensionalen Zahlen betrachtet werden:

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}_j + \mathbb{X}^j = \left(x_0 + \vec{i} \cdot i\vec{x}_k\right) + \left(i x^0 + \vec{i} \cdot \vec{x}^k\right) \tag{1.17}$$

Nachfolgende Untersuchungen an dieser achtfachen Zahl haben gezeigt, dass sich dieses Bi-Quaternion hervorragend zur kompakten Beschreibung der Elektrodynamik und weiterer Gebiete der Physik eignet.

Aber zuerst müssen wir uns entscheiden, ob entweder $\mathbb{X}_j$ oder $\mathbb{X}^j$ Representant eines physikalischen Vierervektors verwendet wird. Rechnungen zeigen, dass beide zu äquivalenten Ergebnissen führen. Die Wahl zwischen $\mathbb{X}_j$ und $\mathbb{X}^j$ ist also frei. Um weiterhin einen realen Term zu haben, entscheiden wir uns nachfolgend, dass $\mathbb{X}_j$ den bekannten physikalischen Vierervektoren zugeordnet werden.

Wie wir später sehen werden, können damit alle Grundgleichungen der klassischen und relativistischen Elektrodynamik ohne Tensor-Multiplikationen sondern alleinig durch Bi-Quaternion-Multiplikationen hergeleitet werden.

Bei der Multiplikation von zwei Bi-Quaternionen treten 16 oder 64 Glieder auf, die zusammenfassend wiederum ein Bi-Quaternion gemäß (1.17) ergeben. Die Abbildung dieser Ergebnisse auf physikalische Vierervektoren $\mathbb{X}_j$ liefert parallel dazu $\mathbb{X}^j=0$.

Wie nachfolgend gezeigt wird, hat diese Nullsetzung des jeweiligen anderen Vierervektors ihre Ursache in physikalischen Erhaltungssätzen.

Die Bi-Quaternionen (1.17) lassen sich somit wie folgt klassifizieren:

Unvollständige Bi-Quaternionen $\qquad \mathbb{X}_j = x_0 + \vec{i} \cdot i\vec{x}_k \qquad \mathbb{X}^j = x^0 + \vec{i} \cdot i\vec{x}^k \qquad$ (1.18)

Vollständiges Bi-Quaternion $\qquad \mathbb{X} = \mathbb{X}_j + \mathbb{X}^j = \left(x_0 + i x^0\right) + \vec{i} \cdot \left(i\vec{x}_k + \vec{i} \cdot \vec{x}^k\right) \qquad$ (1.19)

 copyright © (2007) by André Waser; www.andre-waser.ch

Rechenregeln mit unvollständigen Bi-Quaternionen

Wir haben die zwei unvollständigen Bi-Quaternionen

$$\mathbb{X} = \left(x_0 + \vec{i} \cdot i\vec{x}_k\right) \text{ und } \mathbb{Y} = \left(y_0 + \vec{i} \cdot i\vec{y}_k\right) .$$

Ein konjugiertes unvollständiges Bi-Quaternion $\mathbb{X}^*$ ist dann:

$$\mathbb{X}^* = \left(x_0 - \vec{i} \cdot i\vec{x}_k\right) \tag{1.20}$$

Das Skalarprodukt zweier unvollständiger Bi-Quaternionen $\mathbb{X}\cdot\mathbb{Y}$ ist:

$$\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} = \mathbb{Y} \cdot \mathbb{X} = \left(x_0 y_0 - \vec{x}_k \cdot \vec{y}_k\right) \tag{1.21}$$

und $\mathbb{X}\cdot\mathbb{Y}^*$ ist:

$$\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}^* = \mathbb{Y} \cdot \mathbb{X}^* = \left(x_0 y_0 + \vec{x}_k \cdot \vec{y}_k\right) \tag{1.22}$$

Die Multiplikation zweier unvollständigen Bi-Quaternionen $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ ist:

$$\begin{aligned} \mathbb{X}\mathbb{Y} &= \left(x_0 y_0 + \vec{x}_k \cdot \vec{y}_k\right) + \vec{i} \cdot \left[i\left(x_0 \vec{y}_k + \vec{x}_k y_0\right) - \vec{x}_k \times \vec{y}_k \right] \\ \mathbb{Y}\mathbb{X} &= \left(x_0 y_0 + \vec{x}_k \cdot \vec{y}_k\right) + \vec{i} \cdot \left[i\left(x_0 \vec{y}_k + \vec{x}_k y_0\right) + \vec{x}_k \times \vec{y}_k \right] \end{aligned} \tag{1.23}$$

Der Betrag des unvollständigen Bi-Quaternions $\mathbb{X}$ ist:

$$\left|\mathbb{X}\right| = \sqrt{\mathbb{X} \cdot \mathbb{X}} = \sqrt{x_0^2 - \vec{x}_k \cdot \vec{x}_k} \tag{1.24}$$

Dann gilt auch

$$\mathbb{X}\mathbb{X}^* = \mathbb{X}^*\mathbb{X} = x_0^2 - \vec{x}_k \cdot \vec{x}_k = \left|\mathbb{X}\right| = \mathbb{X} \cdot \mathbb{X} \tag{1.25}$$

Rechenregeln mit vollständigen Bi-Quaternionen

Wir haben die zwei vollständigen Bi-Quaternionen

$$\mathbb{X} = \left[x_0 + ix^0 + \vec{i} \cdot \left(i\vec{x}_k + \vec{x}^k\right)\right] \text{ und } \mathbb{Y} = \left[y_0 + iy^0 + \vec{i} \cdot \left(i\vec{y}_k + \vec{y}^k\right)\right].$$

wobei die hoch- und tiefgestellten Indexes k=1,2,3 keine Potenzen sind.

Ein konjugiertes vollständiges Bi-Quaternion $\mathbb{X}^*$ ist dann:

$$\mathbb{X}^* \equiv \left[\left(x_0 - ix^0\right) - \vec{i} \cdot \left(i\vec{x}_k - \vec{x}^k\right)\right] \tag{1.26}$$

Das Skalarprodukt $\mathbb{X}\cdot\mathbb{Y}$ ist:

$$\begin{aligned} \mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} = \mathbb{Y} \cdot \mathbb{X} = \; & \left(x_0 y_0 - \vec{x}_k \cdot \vec{y}_k + x^0 y^0 - \vec{x}^k \cdot \vec{y}^k\right) \\ & + i\left(x_0 y^0 + \vec{x}_k \cdot \vec{y}^k + x^0 y_0 + \vec{x}^k \cdot \vec{y}_k\right) \end{aligned} \tag{1.27}$$

und $\mathbb{X}\cdot\mathbb{Y}^*$ ist:

$$\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}^* = \mathbb{Y} \cdot \mathbb{X}^* = x_0 y_0 + \vec{x}_k \cdot \vec{y}_k + x^0 y^0 + \vec{x}^k \cdot \vec{y}^k \tag{1.28}$$

Die Multiplikation $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ ist:

$$\begin{aligned} \mathbb{X}\mathbb{Y} = \; & \left(x_0 y_0 + \vec{x}_k \cdot \vec{y}_k - x^0 y^0 - \vec{x}^k \cdot \vec{y}^k\right) + i\left(x_0 y^0 - x_k y^k + x^0 y_0 - x^k y_k\right) \\ & + \vec{i} \cdot \Big[\left(x_0 \vec{y}^k - x^0 \vec{y}_k + y_0 \vec{x}^k - y^0 \vec{x}_k\right) + i\left(x_0 \vec{y}_k + x^0 \vec{y}^k + y_0 \vec{x}_k + y^0 \vec{x}^k\right) \\ & + \left(\vec{x}^k \times \vec{y}^k - \vec{x}_k \times \vec{y}_k\right) + i\left(\vec{x}_k \times \vec{y}^k + \vec{x}^k \times \vec{y}_k\right)\Big] \end{aligned} \tag{1.29}$$

Der Betrag des vollständigen Bi-Quaternions $\mathbb{X}$ ist:

$$\left|\mathbb{X}\right|^2 = \sqrt{\mathbb{X} \cdot \mathbb{X}} = \sqrt{\left(x_0 x_0 - \vec{x}_k \cdot \vec{x}_k + x^0 x^0 - \vec{x}^k \cdot \vec{x}^k\right) + 2i\left(x_0 x^0 + \vec{x}_k \cdot \vec{x}^k\right)} \tag{1.30}$$

Die Multiplikation $\mathbb{X}\mathbb{X}^*$ ist:

$$\mathbb{X}\mathbb{X}^* = \left(x_0 x_0 + x^0 x^0 - \vec{x}_k \cdot \vec{x}_k - \vec{x}^k \cdot \vec{x}^k\right) + 2\vec{i} \cdot \left[\left(x_0 \vec{x}^k + x^0 \vec{x}_k\right) + i\left(\vec{x}_k \times \vec{x}^k\right)\right] \quad (1.31)$$

Die Multiplikation $\mathbb{X}\mathbb{Y}^*$ ist:

$$\begin{aligned}\mathbb{X}\mathbb{Y}^* = \; & \left(x_0 y_0 + x^0 y^0 - \vec{x}_k \cdot \vec{y}_k - \vec{x}^k \cdot \vec{y}^k\right) + i\left(x^0 y_0 + x^k y_k - x_0 y^0 - x_k y^k\right) \\ & + \vec{i} \cdot \left[\left(x_0 \vec{y}^k + x^0 \vec{y}_k + y_0 \vec{x}^k + y^0 \vec{x}_k\right) + i\left(x^0 \vec{y}^k + y_0 \vec{x}_k - x_0 \vec{y}_k - y^0 \vec{x}^k\right)\right. \\ & \left.\left(\vec{x}_k \times \vec{y}_k + \vec{x}^k \times \vec{y}^k\right) + i\left(\vec{x}_k \times \vec{y}^k + \vec{x}^k \times \vec{y}_k\right)\right]\end{aligned} \quad (1.32)$$

Ableitungen

Der Bi-Quaternion Nabla Operator ist:

$$\nabla_j \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbb{X}_j} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\left(\frac{\partial}{\partial x_1} i + \frac{\partial}{\partial x_2} j + \frac{\partial}{\partial x_3} k\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{i} \cdot i\vec{\nabla} \quad (1.33)$$

Der Bi-Quaternion D'ALEMBERT Operator ist:

$$\Delta_j \equiv \left|\nabla_j\right|^2 = \nabla_j^* \left(\nabla_j \quad\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\Delta} \quad (1.34)$$

Totale Ableitung nach der Zeit

Der Operator für die totale zeitliche Ableitung eines Bi-Quaternions ist (siehe Anhang A):

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\nabla}\right) + \vec{i} \cdot \left[i\left(c\vec{\nabla} + \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c} \circ \frac{\partial}{\partial t}\right) - \left(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\nabla}\right)\right] \quad (1.35)$$

Das spezielle Multiplikationszeichen ∘ bedeutet, dass beim Anwenden des Operators für den Skalarteil das Skalarprodukt und für den Vektorteil das Kreuzprodukt angewendet werden muß.

Der Operator in Gleichung (1.35) ist analog zum bekannten Operator in der Ebene:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla$$

Das selbe Resultat wie in (1.35) erhalten wir mit folgender Multiplikation

$$\left(\mathbb{V}\nabla\right)\mathbb{A} = \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\nabla}\right) + \vec{i} \cdot \left[i\left(c\vec{\nabla} + \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c} \circ \frac{\partial}{\partial t}\right) - \left(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\nabla}\right)\right]\right)\mathbb{A} \quad (1.36)$$

Angewendet auf den Ereignisvektor $\mathbb{X}$ finden wir

$$\mathbb{V} = \frac{d\mathbb{X}}{dt} = \frac{1}{4}\left(\mathbb{V}\nabla\right)\mathbb{X} \quad (1.37)$$

copyright © (2007) by André Waser; www.andre-waser.ch

Bi-Quaternionen im vierdimensionalen Raum

Ein **Ereignis** $\mathbb{X}$ im vierdimensionalen Raum kann direkt mit einem Bi-Quaternion dargestellt werden gemäß

$$\mathbb{X} \equiv ct + \vec{i} \cdot i\vec{x} \ . \tag{1.38}$$

Der Betrag (Abstand des Ereignisses zum Ursprung) führt gemäß (1.12) zu:

$$\left|\mathbb{X}\right| = \sqrt{c^2t^2 - x^2} \tag{1.39}$$

Dieser Betrag ist nach Auffassung der speziellen Relativitätstheorie invariant zum Inertialsystem. Das gilt auch für das Differential d$\mathbb{X}$. Eine Division von d$\mathbb{X}$ durch c ergibt eine weitere Invariante:

$$\frac{1}{c}d\mathbb{X} = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = d\tau \tag{1.40}$$

Dies stellt die aus der Relativitätstheorie bekannte Zeitdilatation dar. Für das Differential eines Ereignisvektors $\mathbb{X}$ gilt ferner

$$d\mathbb{X} = cdt + \vec{i} \cdot id\vec{x} \tag{1.41}$$

so daß daraus die bekannte relativistische **Vierergeschwindigkeit** $\mathbb{U}$ folgt zu:

$$\mathbb{U} = \frac{d\mathbb{X}}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\vec{i} \cdot i\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ , \tag{1.42}$$

wobei $\vec{v}$ die Geschwindigkeit zwischen zwei relativ zueinander bewegten Inertialsystem ist. Der Betrag der relativistischen Vierergeschwindigkeit ist bekanntlich immer gleich c.

$$\left|\mathbb{U}\right| = c \tag{1.43}$$

Aus (1.42) finden wir die bekannten Faktoren aus der Relativitätstheorie:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ , \qquad \gamma^2 - 1 = \frac{v^2}{c^2}\gamma^2 \ , \qquad \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} = \frac{v^2}{c^2} \ , \tag{1.44}$$

(1.44)a, b, c

Bilden wir die zeitlich totale Ableitung des Ereignisvektors $\mathbb{X}$ so erhalten wir eine andere, nicht relativistische Vierergeschwindigkeit (Koordinatengeschwindigkeit) $\mathbb{V}$

$$\mathbb{V} = \frac{d\mathbb{X}}{dt} = c + \vec{i} \cdot i\vec{v} \tag{1.45}$$

die mit der relativistischen Vierergeschwindigkeit verknüpft ist gemäß

$$\mathbb{U} = \gamma\mathbb{V} \tag{1.46}$$

Die Addition von zwei Geschwindigkeiten $\mathbb{V}_1$ und $\mathbb{V}_2$ muß weiterhin Gleichung (1.43) genügen:

$$\left|\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2\right| = c \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 \neq 2c + \vec{i} \cdot \left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right) \tag{1.47}$$

Das Additionsgesetz wird im nächsten Abschnitt hergeleitet.

Die Lorentz-Transformation in Bi-Quaternion Form

Die relativistische Vierergeschwindigkeit $\mathbb{U}$ ist besonders hilfreich zur Formulierung der Koordinatentransformation zwischen den relativ zueinander bewegten Systemen S' und S (s. Anhang B). Sei $\mathbb{U} = c + \vec{i} \cdot i\vec{u}$ die Relativgeschwindigkeit zwischen S und S', so ist:

$$\mathbb{X}' = \frac{\gamma}{c}\mathbb{U}^*\mathbb{X} \tag{1.48}$$

Und umgekehrt ist

$$\mathbb{X} = \frac{\gamma}{c}\mathbb{U}\mathbb{X}' \tag{1.49}$$

Und aufgelöst:

$$ct' = \gamma\left(ct - \frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{c}\right), \qquad \vec{x}' = \gamma\left(\vec{x} - \vec{v}t\right) \tag{1.50)a, b}$$

$$ct = \gamma\left(ct' + \frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{c}\right), \qquad \vec{x} = \gamma\left(\vec{x}' + \vec{v}t\right) \tag{1.51)a, b}$$

Die Vierergeschwindigkeit $\mathbb{U}$ bez. $\mathbb{U}^*$ ist der Operator, um ein Bi-Quaternion (Vierervektor) von einem Inertialsystem ins andere relativ dazu bewegte Inertialsystem zu transformieren. Ganz allgemein ist der Transformationsoperator zwischen Größen im Inertialsystem S und S' mit der Relativgeschwindigkeit $\mathbb{U} = c + \vec{i} \cdot i\vec{u}$:

$$\ldots' = \frac{\gamma}{c}\mathbb{U}^*\ldots \tag{1.52}$$

$$\ldots = \frac{\gamma}{c}\mathbb{U}\ldots' \tag{1.53}$$

Das **Additionstheorem der Geschwindigkeiten** läßt sich – neben dem üblichen Weg über die Differentiale von (1.50) oder (1.51) – auch mit obiger Transformation schreiben.

Wir haben die Systeme S und S', die sich wiederum gegeneinander mit $\mathbb{U}$ bewegen. In S' bewege sich ein Körper mit der Geschwindigkeit $\mathbb{V}' = c + \vec{i} \cdot i\vec{v}'$. Dann ist

$$\mathbb{V}'' = \frac{\gamma}{c}\mathbb{U}\mathbb{V}' = \gamma\left(c + \frac{uv'}{c}\right) + \gamma\vec{i}\cdot i\left(\vec{u} + \vec{v}'\right) \tag{1.54}$$

Der Realteil der Vierer-Geschwindigkeit muß immer gleich der Lichtgeschwindigkeit sein. Dies erreichen wir in (1.54) durch Division mit $\mathbb{V}_0''$

$$\mathbb{V} = \frac{c}{\mathbb{V}_0''}\mathbb{V}'' = \frac{1}{\gamma}\frac{1}{1+\frac{uv'}{c^2}}\mathbb{V}'' = c + \vec{i}\cdot i\frac{\vec{u}+\vec{v}'}{1+\frac{uv'}{c^2}} \tag{1.55}$$

und daraus

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}+\vec{v}'}{1+\frac{uv'}{c^2}} \tag{1.56}$$

$$\left|\mathbb{U} + \mathbb{V}'\right| = c \tag{1.57}$$

Die „Normierung“ mit $\mathbb{V}_0''$ hat ihren Ursprung in der „Bestimmung“ der Geschwindigkeit $\mathbb{V}$' außerhalb von S'. Denn $\mathbb{V}$' kann im System S nicht direkt gemessen werden.

copyright © (2007) by André Waser; www.andre-waser.ch

Die Bi-Quaternion Elektrodynamik für lineares & isotropisches Medium (Vakuum)

Das elektrische und magnetische Bi-Quaternion Kraftfeld

Analog zur Geschwindigkeit setzen wir die **Bi-Quaternion Potenziale** an mit den Komponenten φ [V] und $\vec{A}$ [Vs / m]:

$$\mathbb{A} \equiv \frac{\varphi}{c} + \vec{i} \cdot \mathrm{i}\vec{A} \tag{2.1}$$

oder mit

$$\vec{A} = \frac{\varphi}{c^2}\vec{v} \tag{2.2}$$

auch

$$\mathbb{A} \equiv \frac{\varphi}{c^2}\mathbb{V} = \frac{\varphi}{c^2}\left(c + \vec{i} \cdot \mathrm{i}\vec{v}\right) \tag{2.3}$$

Dann ergibt die Ableitung des Bi-Quaternion Potenzials (2.1) gemäß:

$$\nabla\mathbb{A} = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) + \vec{i} \cdot \left[\frac{\mathrm{i}}{c}\left(\vec{\nabla}\varphi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) - \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)\right] \tag{2.4}$$

mit den Substitutionen

$$s = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\,, \qquad \vec{E} = \frac{\vec{F}_q}{q} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \text{(2.5)a, b, c}$$

die Gleichung für das **elektrische Kraftfeld** $\mathbb{E}$ [V / m]:

$$\mathbb{E} = -c\nabla\mathbb{A} = c\,s + \vec{i} \cdot \left(\mathrm{i}\vec{E} + c\,\vec{B}\right) \quad \text{oder} \quad \mathbb{E} = \vec{i} \cdot \left(\mathrm{i}\vec{E} + c\vec{B}\right) \text{ für } s{=}0 \tag{2.6}$$

und die Gleichung für die **magnetische Induktion** $\mathbb{B}$ [Vs / m²]:

$$\mathbb{B} = -\mathrm{i}\nabla\mathbb{A} = \mathrm{i}\,s + \vec{i} \cdot \left(\mathrm{i}\vec{B} - \frac{1}{c}\vec{E}\right) \quad \text{oder} \quad \mathbb{B} = \vec{i} \cdot \left(\mathrm{i}\vec{B} - \frac{1}{c}\vec{E}\right) \text{ für } s{=}0 \tag{2.7}$$

und finden daraus

$$\mathbb{E} = -\mathrm{i}c\mathbb{B}\,, \qquad \mathbb{B} = \frac{\mathrm{i}}{c}\mathbb{E} \tag{2.8}$$

Betrachten wir den reellen skalaren Term *s* etwas genauer. Es ist

$$\nabla \cdot \mathbb{A} = -s = -\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\varphi\vec{v}\right)\right] = -\frac{1}{c^2}\frac{d\varphi}{dt} \tag{2.9}$$

s ist aus der L**ORENTZ-Bedingung** ($s = 0$) bekannt. Die LORENTZ-Bedingung ist demnach eine Forderung nach Quellenfreiheit des Bi-Quaternion Potenzials $\mathbb{A}$, denn es ist

$$-s = \nabla \cdot \mathbb{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\varphi\vec{v}\right) = 0 \tag{2.10}$$

Dies zeigt, dass die LORENTZ-Bedingung die Forderung nach der Erhaltung der Skalarpotenzials φ darstellt. Die LORENTZ-Bedingung ist ein Erhaltungssatz. Aus (2.9) folgt unabhängig vom Wert für *s* auch noch die **generelle Lorentz-Bedingung**:

$$\frac{1}{c^2}\frac{d\varphi}{dt} + \nabla \cdot \mathbb{A} = 0 \tag{2.11}$$

copyright © (2007) by André Waser; www.andre-waser.ch

Die Bi-Quaternion Potenzialdichte

Analog zu den Potenzialen setzen wir die **Bi-Quaternion Ladungs- und Stromdichte** an mit den Komponenten ρ [As / m³] und $\vec{J}$ [A / m²]:

$$\mathbb{J} \equiv c\rho + \vec{i} \cdot i\vec{J} \tag{2.12}$$

oder mit

$$\vec{J} = \rho\vec{v} = \gamma\rho_0\vec{v} \tag{2.13}$$

auch

$$\mathbb{J} \equiv \rho_0\mathbb{U} = \rho\mathbb{V} = c\rho + \vec{i} \cdot i\rho\vec{v} \tag{2.14}$$

Dann ergibt die Ableitung der Stromdichte (2.12)

$$\nabla\mathbb{J} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \vec{i}\cdot\left[i\left(c\vec{\nabla}\rho + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}\right) - \left(\vec{\nabla}\times\vec{J}\right)\right] \tag{2.15}$$

mit den Substitutionen

$$\underline{\sigma} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\,, \qquad \underline{\vec{A}} = -\mu c\vec{\nabla}\rho - \frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}\,, \qquad \underline{\vec{J}} = \vec{\nabla}\times\vec{J} \tag{2.16)a, b}$$

die Gleichungen für eine Volumen-Stromdichte $\underline{\mathbb{J}}$ [A / m³]:

$$\underline{\mathbb{J}} = -i\nabla\mathbb{J} = i\underline{\sigma} + \vec{i}\cdot\left(i\underline{\vec{J}} - \frac{1}{\mu}\underline{\vec{A}}\right) \tag{2.17}$$

und eine Potenzialdichte $\underline{\mathbb{A}}$ [Vs / m⁴]:

$$\underline{\mathbb{A}} = -\mu\nabla\mathbb{J} = \mu\underline{\sigma} + \vec{i}\cdot\left(i\underline{\vec{A}} + \mu\underline{\vec{J}}\right) \tag{2.18}$$

und finden daraus

$$\underline{\mathbb{A}} = -i\mu\underline{\mathbb{J}}\,, \qquad \underline{\mathbb{J}} = \frac{i}{\mu}\underline{\mathbb{A}} \tag{2.19}$$

Betrachten wir den reellen skalaren Term σ etwas genauer. Dieser ist

$$\nabla\cdot\mathbb{J} = -\underline{\sigma} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{v}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{d\rho}{dt} \tag{2.20}$$

$\underline{\sigma}$ ist aus der Ladungserhaltung ($\underline{\sigma} = 0$) bekannt. Die Ladungserhaltung ist demnach eine Forderung nach Quellenfreiheit der Bi-Quaternion Potenzialdichte $\underline{\mathbb{A}}$, denn es ist

$$-\underline{\sigma} = \mu\nabla\cdot\mathbb{J} = 0 \quad\to\quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \quad\to\quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{v}\right) = 0 \tag{2.21}$$

Die Erhaltung ist analog zum elektrischen Skalarpotenzial φ. Mit dem Erhaltungssatz (2.21) erhalten wir für die Bi-Quaternion Potenzialdichte und Volumenstromdichte:

$$\underline{\mathbb{A}} = \vec{i}\cdot\left(\underline{\vec{A}} + i\underline{\vec{J}}\right), \qquad \underline{\mathbb{J}} = \vec{i}\cdot\left(i\underline{\vec{J}} - \frac{1}{\mu}\underline{\vec{A}}\right) \tag{2.22}$$

copyright © (2007) by André Waser; www.andre-waser.ch

Die MAXWELL'schen Gleichungen für freie Ladungen und Ströme

Mit folgendem Ansatz erhalten wir direkt die Maxwell'schen Gleichungen in Bi-Quaternion Form:

$$-\frac{1}{c}\nabla^{*}\mathbb{E}=\nabla^{*}\mathrm{i}\mathbb{B}=\nabla^{*}\nabla\mathbb{A}=\Delta\mathbb{A}=\mu\mathbb{J} \tag{2.23}$$

Oder aufgelöst:

$$\mu\mathbb{J}=\frac{1}{c}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}-\frac{\partial s}{\partial t}\right)-\mathrm{i}\vec{\nabla}\cdot\vec{B}+\vec{i}\cdot\left[\mathrm{i}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{\nabla}s\right)-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\right] \tag{2.24}$$

beziehungsweise

$$\mu\mathbb{J}=\begin{pmatrix}\mu c\rho\\0\end{pmatrix}+\mathrm{i}\begin{pmatrix}0\\\mu\vec{J}\end{pmatrix}=\frac{1}{c}\begin{pmatrix}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}-\dfrac{\partial s}{\partial t}\\\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{\nabla}\times\vec{E}\end{pmatrix}+\mathrm{i}\begin{pmatrix}-\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\\\vec{\nabla}\times\vec{B}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{\nabla}s\end{pmatrix} \tag{2.25}$$

Ähnliche Gleichungen wurden bereits von HONIG[8] vorgestellt. Aus (2.25) lassen sich die Maxwell'schen Gleichungen in Differentialform direkt hinschreiben:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \tag{2.26}$$

AMPÈRE'sches Gesetz

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{\nabla}\times\vec{E}=0 \tag{2.27}$$

Erweitertes COULOMB'sches Gesetz

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}-\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2.28}$$

Erweitertes FARADAY'sches Gesetz

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{\nabla}s=\mu\vec{J} \tag{2.29}$$

Die letzten zwei Gleichungen gehen mit dem Erhaltungssatz des elektrischen Skalarpotenzials (2.10) über zu

COULOMB'sches Gesetz

$$\varepsilon\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho \tag{2.30}$$

FARADAY'sches Gesetz

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu\vec{J} \tag{2.31}$$

Aus (2.23) finden wir auch den Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld und der Stromdichte

$$\mathbb{J}=-\frac{1}{\mu c}\nabla^{*}\mathbb{E}=-\varepsilon c\nabla^{*}\mathbb{E} \tag{2.32}$$

Die Wellengleichung der Potenziale und Kraftfelder

Zur Herleitung der Maxwell'schen Gleichungen haben wir den d'Alembert Operator auf die Potenziale angewendet. Explizit ist das:

$$\Delta\,\mathbb{A} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\varphi\right) + \vec{i}\cdot \mathrm{i}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{A}\right) = \mu\mathbb{J} \tag{2.33}$$

Und daraus folgen die Wellengleichungen der Potentiale

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2.34}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{A} = \mu\vec{J} \tag{2.35}$$

Bilden wir die Ableitung von (2.23), so finden wir

$$\nabla\nabla^*\mathrm{i}\mathbb{B} = \Delta\mathrm{i}\mathbb{B} = \mu\nabla\mathbb{J} \tag{2.36}$$

Und daraus

$$-\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 s\right) - \vec{i}\cdot\left[\frac{\mathrm{i}}{c}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{E}\right) + \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{B}\right)\right] =$$

$$\mu\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\right) + \vec{i}\cdot\mu\left[\mathrm{i}\left(c\vec{\nabla}\rho + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}\right) - \left(\vec{\nabla}\times\vec{J}\right)\right]$$

und schließlich die Wellengleichungen der Kraftfelder

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 s = -\mu\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\right) = 0 \tag{2.37}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{E} = -\mu\left(c^2\vec{\nabla}\rho + \frac{\partial\vec{J}}{\partial t}\right) \tag{2.38}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{B} = \mu\vec{\nabla}\times\vec{J} \tag{2.39}$$

 copyright © (2007) by André Waser; www.andre-waser.ch

Die Bi-Quaternion LORENTZ-Kraftdichte und LORENTZ-Kraft

Definieren wir die Bi-Quaternion Leistungs- und Kraftdichte mit den Komponenten $\underline{\mathrm{P}}$ [W / m³] und $\underline{\vec{\mathrm{F}}}$ [N / m³] zu

$$\underline{\mathbb{F}} \equiv \frac{1}{c}\underline{\mathrm{P}} + \vec{i}\cdot \mathrm{i}\underline{\vec{\mathrm{F}}} \tag{2.40}$$

und wählen den Bi-Quaternion Ansatz

$$\underline{\mathbb{F}} = \frac{1}{c}\mathbb{J}\mathbb{E} = -\mathrm{i}\mathbb{J}\mathbb{B} = -\mathbb{J}\nabla\mathbb{A} = -\rho\mathbb{V}\nabla\mathbb{A} = -\rho\frac{d\mathbb{A}}{dt} \tag{2.41}$$

so finden wir mit den Substitutionen (2.10) und mit (2.13) die Kraftdichte auf eine Ladungsdichte ρ, die sich im externen Potenzialfeld $\mathbb{A}$ mit der Geschwindigkeit $\mathbb{V}$ bewegt, zu

$$\underline{\mathbb{F}} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix}\underline{\mathrm{P}}\\0\end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix}0\\\underline{\vec{\mathrm{F}}}\end{pmatrix} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix}\rho\vec{v}\cdot\vec{E} + c^2\rho s\\ c^2\rho\vec{B} - \rho\vec{v}\times\vec{E}\end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix}-\rho\vec{v}\cdot\vec{B}\\ \rho\vec{v}\times\vec{B} + \rho\vec{E} + \rho\vec{v}s\end{pmatrix} \tag{2.42}$$

und schließlich

$$\rho\vec{v}\cdot\vec{B} = 0 \tag{2.43}$$

$$\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E} = \vec{B} \tag{2.44}$$

erweiterte Leistungsdichte $$\rho\left(\vec{v}\cdot\vec{E} + c^2 s\right) = \underline{\mathrm{P}} \tag{2.45}$$

erweiterte LORENTZ-Kraftdichte $$\rho\left(\vec{v}\times\vec{B} + \vec{E} + \vec{v}s\right) = \underline{\vec{\mathrm{F}}} \tag{2.46}$$

Beachtenswert ist auch $\vec{J}\cdot\vec{B} = 0$ und dadurch $\mathbb{J}\cdot\mathbb{E} = \underline{\mathrm{P}}$ (2.47)a, b

Die Gleichungen (2.45) und (2.46) gehen mit dem Erhaltungssatz des elektrischen Skalarpotenzials (2.10) über zu

Leistungsdichte (*s*=0) $$\rho\vec{v}\cdot\vec{E} = \underline{\mathrm{P}} \tag{2.48}$$

LORENTZ-Kraftdichte (*s*=0) $$\rho\left(\vec{v}\times\vec{B} + \vec{E}\right) = \underline{\vec{\mathrm{F}}} \tag{2.49}$$

Für eine punktförmige Ladung q im Potenzial $\mathbb{A}$ finden wir analog zu (2.40) und (2.41)

$$\mathbb{F} \equiv \frac{i}{c}\mathrm{P} + \vec{i}\cdot\vec{\mathrm{F}} = -q\mathbb{V}\nabla\mathbb{A} = -q\frac{d\mathbb{A}}{dt} \tag{2.50}$$

erweiterte Leistungsdichte $$q\left(\vec{v}\cdot\vec{E} + c^2 s\right) = \mathrm{P} \tag{2.51}$$

erweiterte LORENTZ-Kraft $$q\left(\vec{v}\times\vec{B} + \vec{E} + \vec{v}s\right) = \vec{\mathrm{F}} \tag{2.52}$$

beziehungsweise mit dem Erhaltungssatz des elektrischen Skalarpotenzials (2.10)

Leistungsdichte (*s*=0) $$q\vec{v}\cdot\vec{E} = \mathrm{P} \tag{2.53}$$

LORENTZ-Kraft (*s*=0) $$q\left(\vec{v}\times\vec{B} + \vec{E}\right) = \vec{\mathrm{F}} \tag{2.54}$$

Bi-Quaternion Poynting Theorem (Energiestromdichte)

Zuerst definieren wir die Bi-Quaternion der Energiestromdichte $\underline{\mathbb{W}}$ mit den Komponenten der Energiedichte $\underline{\mathrm{w}}$ [J / m³] und der Energiestromdichte $\underline{\vec{\mathrm{S}}}$ [Js / m⁴] zu

$$\underline{\mathbb{W}} \equiv \underline{\mathrm{w}} + \frac{1}{\mathrm{c}} \vec{i} \cdot \underline{\vec{\mathrm{S}}} \tag{2.55}$$

Betrachten wir den Fall einer Stromdichte J und der von dieser erzeugten Potenzialfelder $\mathbb{A}$ (Maxwell-Gleichungen). Das Gleichgewicht der Kraftdichten dieser beiden Felder finden wir durch beidseitige Multiplikation der Bi-Quaternion Maxwell Gleichung (2.23) mit $\nabla\mathbb{A}$ und mit (2.41) zu:

$$\frac{1}{\mu}(\Delta\mathbb{A})\nabla\mathbb{A} = \mathbb{J}\nabla\mathbb{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu}(\Delta\mathbb{A})\nabla\mathbb{A} + \underline{\mathbb{F}} = 0 \tag{2.56}$$

Die Rechnung (Anhang C) ergibt für den Skalarteil:

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon\frac{\partial \mathrm{E}^2}{\partial \mathrm{t}} + \mu\frac{\partial \mathrm{B}^2}{\partial \mathrm{t}} + \mu\frac{\partial s^2}{\partial \mathrm{t}}\right) + \vec{\nabla}\cdot\frac{1}{\mu}\left(\vec{\mathrm{E}}\times\vec{\mathrm{B}} - s\,\vec{\mathrm{E}}\right) + \vec{\mathrm{E}}\cdot\vec{\mathrm{J}} + \rho\mathrm{c}^2 s = 0 \tag{2.57}$$

Setzen wir die Substitutionen für die Energiedichte $\underline{\mathrm{w}}$ und die Energiestromdichte $\underline{\vec{\mathrm{S}}}$

$$\underline{\mathrm{w}} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon\vec{\mathrm{E}}\cdot\vec{\mathrm{E}} + \frac{1}{\mu}\vec{\mathrm{B}}\cdot\vec{\mathrm{B}} + \frac{1}{\mu}s^2\right), \quad \underline{\vec{\mathrm{S}}} = \left(\vec{\mathrm{E}}\times\frac{1}{\mu}\vec{\mathrm{B}} - s\,\vec{\mathrm{E}}\right) \tag{2.58)a, b}$$

in (2.57) ein und benützen (2.45), erhalten wir das bekannte Poynting'sche Theorem

$$\frac{\partial\underline{\mathrm{w}}}{\partial \mathrm{t}} + \vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{\mathrm{S}}} + \underline{\mathrm{P}} = 0 \tag{2.59}$$

oder mit (2.59) und (2.55) folgt das erweiterte Poynting'sche Theorem (für $s\neq 0$)

$$\mathrm{c}\nabla\cdot\underline{\mathbb{W}} + \mathbb{J}\cdot\mathbb{E} = 0 \tag{2.60}$$

Die Energiedichte $\underline{\mathrm{w}}$ können wir übrigens mit (1.28) noch schreiben als

$$\underline{\mathrm{w}} = \frac{1}{2}\varepsilon\mathbb{E}\cdot\mathbb{E}^* \tag{2.61}$$

Setzen wir (2.32) in (2.41) ein, so finden wir auch noch

$$\underline{\mathbb{F}} = \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbb{J}\mathbb{E} = -\varepsilon\left(\nabla^*\mathbb{E}\right)\mathbb{E} \tag{2.62}$$

Für den imaginären Vektorterm (Anhang C) haben wir

$$\frac{1}{\mathrm{c}^2}\vec{\mathrm{E}}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{E}}\right) + \left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{B}}\right)\times\vec{\mathrm{B}} + \frac{1}{\mathrm{c}^2}\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{E}}\right)\times\vec{\mathrm{E}} - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\vec{\mathrm{E}}\times\vec{\mathrm{B}} + s\,\vec{\mathrm{E}}\right) + \vec{\nabla}\times s\,\vec{\mathrm{B}} \; - \; \underline{\vec{\mathrm{F}}} = 0 \tag{2.63}$$

Darin entsprechen die ersten drei Terme der Divergenz vom Maxwell Stress Tensor $\mathbb{T}$:

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbb{T} = \frac{1}{\mathrm{c}^2}\vec{\mathrm{E}}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{E}}\right) + \left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{B}}\right)\times\vec{\mathrm{B}} + \frac{1}{\mathrm{c}^2}\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{E}}\right)\times\vec{\mathrm{E}} \tag{2.64}$$

gefolgt von der zeitlichen Ableitung des erweiterten Poynting-Vektors.

 copyright © (2007) by André Waser; www.andre-waser.ch

Bi-Quaternion Lorentz-Transformation elektromagnetischer Größen und Felder

In (2.14) haben wir den Zusammenhang

$$\mathbb{J} = \rho\mathbb{V} = \gamma\rho_0\mathbb{V} \tag{2.65}$$

verwendet. Explizit gilt für die Transformation der Ladungs- und Stromdichte im relativistischen Fall

$$\rho = \gamma\rho_0 \quad \text{und} \quad \rho\vec{v} = \vec{J} = \gamma\vec{J}_0 = \gamma\rho_0\vec{v} \tag{2.66}$$

Die Lorentz-Transformation des Bi-Quaternion Potenzials $\mathbb{A}$ ist:

$$\frac{\varphi'}{c} + \vec{i}\cdot i\vec{A}' = \mathbb{A}' = \frac{\gamma}{c}\mathbb{U}^*\mathbb{A} = \gamma\left[\frac{\varphi}{c} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{A}}{c} + \vec{i}\cdot\left(i\vec{A} - i\frac{\varphi}{c^2}\vec{u} - \frac{\vec{u}\times\vec{A}}{c}\right)\right] \tag{2.67}$$

und wir finden durch Koeffizientenvergleich:

$$\varphi' = \gamma\left(\varphi - \vec{A}\cdot\vec{u}\right) \tag{2.68}$$

$$\vec{A}' = \gamma\left(\vec{A} - \frac{\varphi}{c^2}\vec{u}\right) \tag{2.69}$$

Die Lorentz-Transformation der Bi-Quaternion Stromdichte $\mathbb{J}$ ist:

$$c\rho' + \vec{i}\cdot i\vec{J}' = \mathbb{J}' = \frac{\gamma}{c}\mathbb{U}^*\mathbb{J} = \frac{\gamma}{c}\mathbb{U}^*\left(c\rho + \vec{i}\cdot i\vec{J}\right) = \gamma\left[c\rho - \frac{\vec{u}\cdot\vec{J}}{c} + \vec{i}\cdot\left(i\vec{J} - i\rho\vec{u} - \frac{\vec{u}\times\vec{J}}{c}\right)\right]$$

und wir finden wiederum durch Koeffizientenvergleich:

$$\rho' = \gamma\left(\rho - \frac{\vec{J}\cdot\vec{u}}{c^2}\right) \tag{2.70}$$

$$\vec{J}' = \gamma\left(\vec{J} - \rho\vec{u}\right) \tag{2.71}$$

Für die Lorentz-Transformation der Kraftfelder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ haben wir:

$$\mathbb{E}' = \frac{\gamma}{c}\mathbb{U}^*\mathbb{E}$$

$$c\,s' + \vec{i}\cdot\left(i\vec{E}' + c\vec{B}'\right) = \gamma\left[\left(c\,s - \frac{\vec{u}}{c}\cdot\vec{E} + i\vec{u}\cdot\vec{B}\right) + \vec{i}\cdot\left(i\vec{E} + i\vec{u}\times\vec{B} + c\vec{B} - \frac{\vec{u}}{c^2}\times\vec{E} - i\,s\,\vec{u}\right)\right]$$

und daraus

$$s' = \gamma\left(s - \frac{\vec{E}\cdot\vec{u}}{c^2}\right) \tag{2.72}$$

$$\vec{E}' = \gamma\left(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B} - s\,\vec{u}\right) \tag{2.73}$$

$$\vec{B}' = \gamma\left(\vec{B} - \frac{\vec{u}}{c^2}\times\vec{E}\right) \tag{2.74}$$

Dynamik & Kinematik

Das Bi-Quaternion Gravitationsfeld

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Dynamik bewegter Körper analog zum vorherigen Formalismus zur Elektrodynamik. Als Ausgangspunkt benötigen wir zwei Felder, deren Bedeutung vorerst offen bleiben soll:

$\vec{U}(X)$:	Geschwindigkeitsfeld (analog zu $\vec{A}$)	[m / s]
$\phi(X)$:	Gravitationspotenzial (analog zu φ)	[m^2 / s^2]

Diese formen das **kinemassische Bi-Quaternion Potenzialfeld (Geschwindigkeitsfeld)**

$$\mathbb{U} = \frac{\phi}{c} + \vec{i} \cdot i\vec{U} \tag{3.1}$$

Dann ergibt die Ableitung von $\mathbb{U}$

$$\nabla\mathbb{U} = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{U}\right) + \vec{i}\cdot\left[\frac{i}{c}\left(\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\right) - \left(\vec{\nabla}\times\vec{U}\right)\right] \tag{3.2}$$

Substituieren wir darin die folgenden Kraftfelder:

$$s_m = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot\vec{U}\ , \qquad \vec{G} = \frac{\vec{F}_m}{m} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\ , \qquad \vec{T} = \vec{\nabla}\times\vec{U} \qquad \text{(3.3)a, b, c}$$

mit

$\vec{F}_m$:	Kraft auf eine Punktmasse m (Testmasse)	[N] = [kg m / s^2]
$\vec{G}$:	Gravitationsfeld, Beschleunigungsfeld	[m / s^2]
$\vec{T}$:	Rotationsfeld, dynamische Induktion	[1 / s]

wobei das Gravitationsfeld aus zwei (bekannten) Teilen besteht:

$$\vec{G}_G = -\vec{\nabla}\phi \qquad \text{und} \qquad \vec{G}_T = -\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} \qquad \text{(3.4)a, b}$$

$\vec{G}_G$:	Gravitationsfeld eines Gravitationspotenzials	[m / s^2]
$\vec{G}_T$:	Beschleunigungsfeld, induziertes Gravitationsfeld	[m / s^2]

so finden wir für das Gravitationsfeld $\mathbb{G}$ [m / s^2] auf eine Testmasse m

$$\mathbb{G} = -c\nabla\mathbb{U} = c\,s_m + \vec{i}\cdot\left(i\vec{G} + c\,\vec{T}\right) \tag{3.5}$$

und für die dynamische Induktion $\mathbb{T}$ [s^{-1}]:

$$\mathbb{T} = -i\nabla\mathbb{U} = i\,s_m + \vec{i}\cdot\left(i\vec{T} - \frac{1}{c}\vec{G}\right) \tag{3.6}$$

und finden daraus

$$\mathbb{G} = -ic\mathbb{T}\ , \qquad \mathbb{T} = \frac{i}{c}\mathbb{G} \tag{3.7}$$

Der skalare Term von (3.2) ist , wenn zu Null gesetzt, wiederum ein Erhaltungssatz:

$$-s_m = \nabla\cdot\mathbb{U} = 0 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{U} = 0 \quad\rightarrow\quad \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\phi\vec{U}\right) = 0 \tag{3.8}$$

copyright © (2007) by André Waser; www.andre-waser.ch

Die Bi-Quaternion Impulsdichte

Analog zur Ladungs- und Stromdichte der Elektrodynamik setzen wir die Bi-Quaternion Massen- und Impulsdichte $\underline{\mathbb{p}}_m$ an mit den Komponenten $\underline{m}$ [kg / m³] und $\underline{\vec{p}}_m$ [kg / sm²]:

$$\underline{\mathbb{p}}_m \equiv c\,\underline{m} + \vec{i}\cdot i\underline{\vec{p}}_m \tag{3.9}$$

oder mit

$$\underline{\vec{p}}_m = \underline{m}\vec{v} = \gamma\underline{m}_0\vec{v} \tag{3.10}$$

auch

$$\underline{\mathbb{p}}_m \equiv \underline{m}\mathbb{V} = \underline{m}c + \vec{i}\cdot i\underline{m}\vec{v} \tag{3.11}$$

Dann ergibt die Ableitung der Impulsdichte [kg / sm³]:

$$\nabla\underline{\mathbb{p}}_m = \frac{\partial\underline{m}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{p}}_m + \vec{i}\cdot\left[i\left(c\vec{\nabla}\underline{m} + \frac{1}{c}\frac{\partial\underline{\vec{p}}_m}{\partial t}\right) - \left(\vec{\nabla}\times\underline{\vec{p}}_m\right)\right] \tag{3.12}$$

Im Skalarteil erkennen wir die Kontinuitätsgleichung der Massendichte bez. den Erhaltungssatz der Masse

$$\frac{\partial\underline{m}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{p}}_m = 0$$

Anstelle der Massendichte $c\underline{m}$ können wir auch die Energiedichte $\underline{w}_m/c$ verwenden. Die Gleichung (3.9) wird dann:

$$\underline{\mathbb{p}}_m = \frac{\underline{w}_m}{c} + \vec{i}\cdot i\underline{\vec{p}}_m \tag{3.13}$$

Anstelle der Massendichte gilt für Punktmassen auch

$$\mathbb{P}_m = \frac{W_m}{c} + \vec{i}\cdot i\vec{p} \tag{3.14}$$

Der relativistische Impuls $\mathbb{p}_m$ einer Punktmasse m mit der Bi-Quaternion Geschwindigkeit $\mathbb{V}$ ist

$$\mathbb{P}_m = m_0\gamma\mathbb{V} \tag{3.15}$$

Diese Betrachtung ist analog zu (3.59) und entspricht der gesamten Eigenenergie bez. Eigenimpuls einer Masse (bez. Ladung). Aus (3.15) folgt unmittelbar

$$W_m = \gamma m_0 c^2 \cong m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \ldots \tag{3.16}$$

Die Feldgleichungen der Dynamik

Ausgerüstet mit der Bi-Quaternion Impulsdichte $\underline{\mathbb{p}}_{\mathrm{m}}$ und dem Potenzialfeld $\mathbb{U}$ können wir analog zur Elektrodynamik (2.23) ansetzen:

$$-\frac{1}{c}\nabla^*\mathbb{G} = \nabla^* i\mathbb{T} = \nabla^*\nabla\mathbb{U} = \Delta\mathbb{U} = \frac{g}{c^2}\underline{\mathbb{p}}_{\mathrm{m}} \tag{3.17}$$

worin g die Gravitationskonstante von $6.67\cdot 10^{-11}$ [N m^2 / kg^2] ist. Aus (3.17) wird

$$\frac{g}{c^2}\underline{\mathbb{p}}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{c}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G} - \frac{\partial s_{\mathrm{m}}}{\partial t}\right) - i\vec{\nabla}\cdot\vec{T} + \vec{i}\cdot\left[i\left(\vec{\nabla}\times\vec{T} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{G}}{\partial t} + \vec{\nabla}s_{\mathrm{m}}\right) - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{T}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{G}\right)\right] \tag{3.18}$$

beziehungsweise

$$\frac{g}{c^2}\underline{\mathbb{p}}_{\mathrm{m}} = \frac{g}{c^2}\left[\begin{pmatrix} c\underline{m} \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ \underline{\vec{p}} \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} \vec{\nabla}\cdot\vec{G} - \dfrac{\partial s_{\mathrm{m}}}{\partial t} \\ \dfrac{\partial\vec{T}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{G} \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -\vec{\nabla}\cdot\vec{T} \\ \vec{\nabla}\times\vec{T} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{G}}{\partial t} + \vec{\nabla}s_{\mathrm{m}} \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

Daraus lassen sich die „Maxwell"-Gleichungen der Dynamik hinschreiben:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{T} = 0 \tag{3.20}$$

„AMPÈRE'sches Gesetz"

$$\frac{\partial\vec{T}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{G} = 0 \tag{3.21}$$

Erweitertes „COULOMB'sches Gesetz"

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{G} - \frac{\partial s_{\mathrm{m}}}{\partial t} = g\underline{m} \tag{3.22}$$

Erweitertes „FARADAY'sches Gesetz"

$$\vec{\nabla}\times\vec{T} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{G}}{\partial t} + \vec{\nabla}s_{\mathrm{m}} = \frac{g}{c^2}\underline{\vec{p}} \tag{3.23}$$

Die letzten zwei Gleichungen gehen mit dem Erhaltungssatz des Gravitationspotenzials (3.8) über zu

„COULOMB'sches Gesetz"

$$\frac{1}{g}\vec{\nabla}\cdot\vec{G} = \underline{m} \tag{3.24}$$

„FARADAY'sches Gesetz"

$$\vec{\nabla}\times\vec{T} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{G}}{\partial t} = \frac{g}{c^2}\underline{\vec{p}} \tag{3.25}$$

Aus (3.17) finden wir auch den Zusammenhang zwischen dem Gravitationsfeld $\mathbb{G}$ und der Impulsdichte $\underline{\mathbb{p}}$m

$$\underline{\mathbb{p}}_{\mathrm{m}} = -\frac{c}{g}\nabla^*\mathbb{G} \tag{3.26}$$

 copyright © (2007) by André Waser; www.andre-waser.ch

Die Wellengleichung der Potenziale

Für die obigen Gleichungen haben wir den d'Alembert Operator auf die Potenziale angewendet. Explizit ist das:

$$\Delta\mathbb{U} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\phi\right) + \vec{i}\cdot \mathrm{i}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{U}\right) = \frac{g}{c^2}\underline{\mathbb{p}}_m \tag{3.27}$$

Und daraus folgen die Wellengleichungen der Potentiale

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\phi = g\underline{m} \tag{3.28}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{U} = \frac{g}{c^2}\underline{\vec{p}} \tag{3.29}$$

Bilden wir die Ableitung von (3.17), so finden wir

$$\nabla\nabla^* \mathrm{i}\mathbb{T} = \Delta \mathrm{i}\mathbb{T} = \frac{g}{c^2}\nabla\underline{\mathbb{p}}_m \tag{3.30}$$

Und daraus

$$-\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s_m}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 s_m\right) - \vec{i}\cdot\left[\frac{\mathrm{i}}{c}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{G}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{G}\right) + \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{T}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{T}\right)\right] =$$
$$\frac{g}{c^2}\left(\frac{\partial\underline{m}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{p}}\right) + \vec{i}\cdot\frac{g}{c^2}\left[\mathrm{i}\left(c\vec{\nabla}\underline{m} + \frac{1}{c}\frac{\partial\underline{\vec{p}}}{\partial t}\right) - \left(\vec{\nabla}\times\underline{\vec{p}}\right)\right]$$

und schließlich die Wellengleichungen der Kraftfelder

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s_m}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 s_m = -\frac{g}{c^2}\left(\frac{\partial\underline{m}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{p}}\right) = 0 \tag{3.31}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{G}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{G} = -g\left(\vec{\nabla}\underline{m} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\underline{\vec{p}}}{\partial t}\right) \tag{3.32}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{T}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{T} = \frac{g}{c^2}\vec{\nabla}\times\underline{\vec{p}} \tag{3.33}$$

Diese Gleichungen beschreiben – analog zur Elektrodynamik – bei Abwesenheit von Massendichten eine transversale ‚Gravitationswelle' mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{G}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{G} = 0 \tag{3.34}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{T}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{T} = 0 \tag{3.35}$$

Die Bi-Quaternion Kraftdichte und Trägheitskraft (Reaktionskraft)

Benützen wir mit (2.40) wieder die Bi-Quaternion Leistungs- und Kraftdichte $\underline{\mathbb{F}}$ mit den Komponenten $\underline{P}$ [W / m^3] und $\underline{\vec{F}}$ [N / m^3]

$$\underline{\mathbb{F}} \equiv \frac{1}{c}\underline{P} + \vec{i}\cdot i\underline{\vec{F}}$$

und wählen den Bi-Quaternion Ansatz

$$\underline{\mathbb{F}} = \frac{1}{c}\underline{\mathbb{p}}_m \mathbb{G} = -i\underline{\mathbb{p}}_m \mathbb{T} = -\underline{\mathbb{p}}_m \nabla\mathbb{U} = -\underline{m}\mathbb{V}\nabla\mathbb{U} = -\underline{m}\frac{d\mathbb{U}}{dt} \tag{3.36}$$

so finden wir mit den Substitutionen (3.8) und mit (3.10) die Kraftdichte auf eine Massendichte $\underline{m}$, die sich im externen Potentialfeld $\mathbb{U}$ mit der Geschwindigkeit $\mathbb{V}$ bewegt, zu

$$\underline{\mathbb{F}} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix}\underline{P}\\ 0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\ \underline{\vec{F}}\end{pmatrix} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix}\underline{m}\vec{v}\cdot\vec{G} + \underline{m}c^2\, s_m\\ \underline{m}c^2\vec{T} - \underline{m}\vec{v}\times\vec{G}\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}-\underline{m}\vec{v}\cdot\vec{T}\\ \underline{m}\vec{v}\times\vec{T} + \underline{m}\vec{G} + \underline{m}\vec{v}\, s_m\end{pmatrix} \tag{3.37}$$

und schließlich

$$\underline{m}\vec{v}\cdot\vec{T} = 0 \tag{3.38}$$

$$\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{G} = \vec{T} \tag{3.39}$$

erweiterte Leistungsdichte $$\underline{m}\left(\vec{v}\cdot\vec{G} + c^2\, s_m\right) = \underline{P} \tag{3.40}$$

erweiterte Reaktions-Kraftdichte $$\underline{m}\left(\vec{v}\times\vec{T} + \vec{G} + \vec{v}\, s_m\right) = \underline{\vec{F}} \tag{3.41}$$

Beachtenswert ist auch $$\underline{\vec{p}}\cdot\vec{T} = 0 \quad \text{und dadurch} \quad \underline{\mathbb{p}}_m \cdot \mathbb{G} = \underline{P} \tag{3.42)a, b}$$

Die Gleichungen (3.40) und (3.41) gehen mit dem Erhaltungssatz des Gravitationspotenzials (3.8) über zu

Leistungsdichte (s_m=0) $$\underline{m}\vec{v}\cdot\vec{G} = \underline{P} \tag{3.43}$$

Reaktions-Kraftdichte (s_m=0) $$\underline{m}\left(\vec{v}\times\vec{T} + \vec{G}\right) = \underline{\vec{F}} \tag{3.44}$$

Für eine Punktmasse m im Potentialfeld $\mathbb{U}$ finden wir analog zu (2.40) und (3.36)

$$\mathbb{F} \equiv \frac{i}{c}P + \vec{i}\cdot\vec{F} = -m\mathbb{V}\nabla\mathbb{U} = -m\frac{d\mathbb{U}}{dt} \tag{3.45}$$

erweiterte Leistungsdichte $$m\left(\vec{v}\cdot\vec{G} + c^2\, s_m\right) = P \tag{3.46}$$

erweiterte Reaktions-Kraft $$m\left(\vec{v}\times\vec{T} + \vec{G} + \vec{v}\, s_m\right) = \vec{F} \tag{3.47}$$

beziehungsweise mit dem Erhaltungssatz des Gravitationspotenzials (3.8) ist

Leistungsdichte (s_m=0) $$m\vec{v}\cdot\vec{G} = P \tag{3.48}$$

Reaktions-Kraft (s_m=0) $$m\left(\vec{v}\times\vec{T} + \vec{G}\right) = \vec{F} \tag{3.49}$$

copyright © (2007) by André Waser; www.andre-waser.ch

Die Bi-Quaternion Beschleunigung und Trägheitskraft (Aktionskraft)

Die Aktionskraft, um eine Punktmasse m zu beschleunigen, ist entgegengesetzt zur Trägheitskraft (Reaktionskraft) (3.45). Das externe Geschwindigkeitsfeld $\mathbb{U}$ wird durch die Koordinatengeschwindigkeit $\mathbb{V}$ ersetzt und wir haben den Ansatz

$$\mathbb{F}_m = m\mathbb{a} = m\frac{d\mathbb{V}}{dt} = m\mathbb{V}\nabla\mathbb{V} \tag{3.50}$$

Die Berechnung von $\mathbb{a}$ ergibt:

$$\mathbb{a} = c\begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{a} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \frac{\vec{v}}{c^2}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\times\vec{v} - \frac{\vec{v}}{c^2}\times\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -\vec{v}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right) \\ \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) - \vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right) \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

und schließlich

$$\vec{v}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right) = 0 \tag{3.52}$$

$$\frac{\vec{v}}{c^2}\times\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{v} \tag{3.53}$$

Ergiebigkeit e [s^{-1}]:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \frac{\vec{v}}{c^2}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = e \tag{3.54}$$

Beschleunigung [m / s^2]:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) - \vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right) = \vec{a} \tag{3.55)a}$$

oder

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right) = \vec{a} \tag{3.55)b}$$

oder

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} - \left(\vec{v}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{v} = \vec{a} \tag{3.55)c}$$

Gleichung (3.55)b ist aus der Fluidmechanik bekannt. Neu gefunden haben wir eine Gleichung für die Ergiebigkeit e (oder Durchflußrate einer Strömung) mit der Einheit s^{-1}.

Um die Kraftgleichungen zu finden, multiplizieren wir (3.49) mit einer Punktmasse m oder einer Massendichte $\underline{m}$. Daraus folgt beispielsweise für eine Punktmasse

Aktionskraft: $\vec{F} = m\vec{a}$ (3.56)

Leistung: $P = mc^2 e = mc^2\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \frac{\vec{v}}{c^2}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)$ (3.57)

Bi-Quaternion Eigen-Energiedichte und Massendichte

Bilden wir das Skalarprodukt der Bi-Quaternion Stromdichte $\mathbb{J}$ und dem davon erzeugten Bi-Quaternion Potenzialfeld $\mathbb{A}$, so finden wir die Eigen-Energiedichte $\underline{\mathbb{W}}$ zu:

$$\underline{\mathbb{W}} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{J} = \frac{\varphi}{c^2} \rho \mathbb{V} \cdot \mathbb{V} \tag{3.58}$$

Mit der Bi-Quaternion Impulsdichte $\underline{\mathbb{p}}$ für eine Massendichte $\underline{m}$:

$$\underline{\mathbb{p}} = \underline{m} \mathbb{V} \tag{3.59}$$

finden wir

$$\underline{\mathbb{W}} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{J} = \underline{\mathbb{p}} \cdot \mathbb{V} \tag{3.60}$$

Daraus und mit (2.34) folgt für die Massendichte im statischen Fall ($\partial\varphi/\partial t=0$):

$$\underline{m} = \frac{\varphi}{c^2} \rho = -\frac{\varepsilon}{c^2} \varphi \Delta \varphi \tag{3.61}$$

Die Integration über das gesamte Volumen V

$$m = \int \underline{m}\; dV = -\frac{\varepsilon}{c^2} \int \varphi \Delta \varphi \; dV = \frac{\varepsilon}{c^2} \int \left| \nabla \varphi \right|^2 \; dV = \frac{\varepsilon}{c^2} \int \left(\vec{E} \cdot \vec{E} \right) dV \tag{3.62}$$

ergibt für ein kugelsymmetrisches Potenzialfeld

$$m = \int_r^\infty \frac{q^2}{4\pi\varepsilon c^2} \frac{1}{r_m^2} dr = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon c^2} \frac{1}{r_m} \tag{3.63}$$

Mit der Elementarladung $q=1.602\cdot10^{-19}$ [As] und der Elektronenmasse $m_e=9.11\cdot10^{-31}$ [kg] finden wir zum Beispiel folgenden Wert für den Elektronenradius r_e:

$$r_e = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon c^2} \frac{1}{m_e} = 2.818 \cdot 10^{-15} \left[m \right] \tag{3.64}$$

Aus (3.62) finden wir für ($\partial\varphi/\partial t=0$) den Zusammenhang

$$c^2 \int \underline{m}\; dV = \varepsilon \int \left(\vec{E} \cdot \vec{E} \right) dV \tag{3.65}$$

 copyright © (2007) by André Waser; www.andre-waser.ch

Zusammenfassung

Mit der Verwendung von Bi-Quaternionen können alle wichtigen Grundgleichungen der Elektrodynamik in sehr kompakter Form erfaßt werden. Es ergeben sich daraus sogar neue Ansätze zur erweiterten Schreibweise der MAXWELL'schen Gleichungen und anderen fundamentalen Gleichungen der Elektrodynamik, die mit der Verwendung der LORENTZ-Bedingung $s=0$ jeweils in die klassische Form übergehen.

Eine Deutung des Skalarfeldes s über die Lorentz-Bedingung hinaus wird an einem anderen Ort vorgenommen.

Neben der Elektrodynamik eignen sich Bi-Quaternionen auch zur Anwendung in anderen Gebieten der Physik, wie beispielsweise in der Mechanik (Dynamik) oder – wie im Anhang nur angedeutet – in der Quantenmechanik.

Referenzen

[1] VAN VLAENDEREN Koen and André WASER,, "Generalisation of classical electrodynamics to admit a scalar field and longitudinal waves", *Hadronic Journal* 24 (2001) 609-628

[2] BORK Alfred M., "Vectors Versus Quaternions – The Letters of Nature", *American Journal of Physics* **34** (1966) 202-211

[3] CONWAY A. W., "Quaternion Treatment of the Relativistic Wave Equation", *Proceedings of the Royal Society London, Serie A* **162** (15 September 1937) 145-154

[4] EINSTEIN Albert, „Zur Elektrodynamik bewegter Körper", *Annalen der Physik und Chemie* **17** (30. Juni 1905) 891-921

[5] GOUGH W., „Quaternions and spherical harmonics", *European Journal of Physics* **5** (1984) 163-171

[6] HAMILTON William Rowan, "On a new Species of Imaginary Quantities connected with a theory of Quaternions", *Proceedings of the Royal Irish Academy* **2** (13 November 1843) 424-434

[7] HEAVISIDE Oliver, „On the Forces, Stresses and Fluxes of Energy in the Electromagnetic Field", *Philosophical Transactions of the Royal Society* **183A** (1892) 423

[8] HONIG William M., "Quaternionic Electromagnetic Wave Equation and a Dual Charge-Filled Space", *Lettere al Nuovo Cimento, Ser. 2* **19** No.4 (28 Maggio 1977) 137-140

[9] MAXWELL James Clerk, „A Treatise on Electricity & Magnetism", (1893) *Dover Publications, New York* ISBN 0-486-60636-8 (Vol. 1) & 0-486-60637-6 (Vol. 2)

[10] SILBERSTEIN L., "Quaternionic Form of Relativity", *Philosphical Magazine, Ser. 6* **23** (1912) 790-809

[11] TAIT Peter Guthrie, "An elementary Treatise on Quaternions", *Oxford University Press* 1st Edition (1875)

[12] WALKER Marshall J., "Quaternions as 4-Vectors", *American Journal of Physics* 24 (1956) 515-522

[13] WILSON E. B., "Vector Analysis of Josiah Willard Gibbs – The History of a Great Mind", *Charles Scribner's Sons* New York (1901)

Anhang A

Gegeben sei ein Bi-Quaternion Feld $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathbb{X})$, in dem $\mathbb{X}$ eine Funktion von Raum und Zeit ist, so dass $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathbb{X}(t, x_1, x_2, x_3))$. Die totale Ableitung von $\mathbb{A}$ nach der Zeit ist dann:

$$d\mathbb{A} = \frac{\partial \mathbb{A}(\mathbb{X})}{\partial \mathbb{X}} d\mathbb{X} = \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \mathbb{X}} \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \mathbb{X}} \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial \vec{\mathbf{x}}} d\vec{\mathbf{x}} = -\left(\frac{\partial \mathbb{X}}{\partial t} \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \mathbb{X}} dt + \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial \vec{\mathbf{x}}} \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \mathbb{X}} d\vec{\mathbf{x}} \right) \tag{A.1}$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}} = \nabla \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \vec{\mathbf{x}}} = \vec{\nabla} \tag{A.2}$$

Expandieren wir nun den Operator im ersten Term in (A.1) zu

$$\frac{\partial \mathbb{X}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \mathbb{X}} dt = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{ic}\,\vec{i} \cdot \vec{\nabla} \right) dt \tag{A.3}$$

Der Operator im zweiten Term von (A.1) hat die folgende Erweiterung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{X}}{\partial \vec{\mathbf{x}}} \frac{\partial}{\partial \mathbb{X}} d\vec{\mathbf{x}} \quad &= \left\{ \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial \vec{\mathbf{x}}} d\vec{\mathbf{x}} \right\} \frac{\partial}{\partial \mathbb{X}} \\
&= \left\{ \left(\frac{\partial \mathbb{X}}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial x_3} \vec{e}_3 \right) \left[ct + i\left(x_1\, i\, \vec{e}_1 + x_2\, j\, \vec{e}_2 + x_3\, k\, \vec{e}_3 \right) \right] \right\} \frac{\partial}{\partial \mathbb{X}} \\
&= \left\{ \vec{i} \cdot \left(\frac{\partial \mathbb{X}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial x_3} dx_3 \right) \right\} \frac{\partial}{\partial \mathbb{X}} \\
&= \left\{ \vec{i} \cdot \left(i dx_1 + i dx_2 + i dx_3 \right) \right\} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{i} \cdot i \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \right] \\
&= \vec{i} \cdot d\vec{x} \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{i} \cdot i d\vec{x} \right) \left(\vec{i} \cdot i \vec{\nabla} \right) \\
&= d\vec{x} \cdot \vec{\nabla} + \vec{i} \cdot \left(\frac{i}{c} d\vec{x} \frac{\partial}{\partial t} - d\vec{x} \times \vec{\nabla} \right)
\end{aligned}$$

und schließlich

$$\frac{\partial \mathbb{X}}{\partial \vec{\mathbf{x}}} \frac{\partial}{\partial \mathbb{X}} d\vec{\mathbf{x}} \quad = d\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\nabla} + \vec{i} \cdot \left(\frac{i}{c} d\vec{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial t} - d\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\nabla} \right) \tag{A.4}$$

Die Addition von (A.3) und (A.4) und die anschließende Division mit dt ergibt das totale Zeitdifferential in Bi-Quaternion Form:

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\nabla} \right) + \vec{i} \cdot \left[i \left(c\vec{\nabla} + \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c} \circ \frac{\partial}{\partial t} \right) - \left(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\nabla} \right) \right] \tag{A.5}$$

Das spezielle Multiplikationszeichen ∘ bedeutet, dass beim Anwenden des Operators für den Skalarteil das Skalarprodukt und für den Vektorteil das Kreuzprodukt angewendet werden muß.

 copyright © (2007) by André Waser; www.andre-waser.ch

Anhang B

Gegeben sei die Transformation:

$$\mathbb{X}' = \frac{\gamma}{c}\mathbb{U}^*\mathbb{X} = \gamma\left(1 - \vec{i}\cdot \mathrm{i}\frac{\vec{v}}{c}\right)\left(ct + \vec{i}\cdot \mathrm{i}\vec{x}\right) \tag{B.1}$$

Daraus wird

$$\left(ct' + \vec{i}\cdot \mathrm{i}\vec{x}'\right) = \gamma\left[\left(ct - \frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{c}\right) + \vec{i}\cdot c\left(\mathrm{i}\vec{x} - \mathrm{i}\vec{v}t - \frac{\vec{v}\times\vec{x}}{c}\right)\right] \tag{B.2}$$

Wir finden durch Koeffizientenvergleich:

$$ct' = \gamma\left(ct - \frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{c}\right) \tag{B.3}$$

$$\vec{x}' = \gamma\left(\vec{x} - \vec{v}t\right) \tag{B.4}$$

Die erste Gleichung (B.3) ist bekannt und entspricht der Lorentz-Transformation der Zeit in vektorieller Form. Dass das auch für Gleichung (B.4) zutrifft, zeigt folgende Entwicklung:

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot\gamma\left[\vec{x} - \vec{v}t\right] &= \gamma\vec{v}\cdot\vec{x} - \gamma v^2 t \\ &= \left(\gamma - 1\right)\vec{v}\cdot\vec{x} + \vec{v}\cdot\vec{x} - \gamma v^2 t \\ &= \vec{v}\cdot\left[\vec{x} - \gamma\vec{v}t + \left(\gamma - 1\right)\frac{\vec{v}}{v}\frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{v}\right]\end{aligned}$$

Der Term in der eckigen Klammer der letzten Zeile wird in vielen Textbüchern als Lorentz-Transformation des Vektors $\vec{x}$. beschrieben. Durch Vergleich der beiden Terme in eckigen Klammern finden wir die Identität

$$\gamma\left(\vec{x} - \vec{v}t\right) = \vec{x} - \gamma\vec{v}t + \left(\gamma - 1\right)\frac{\vec{v}}{v}\frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{v} \tag{B.5}$$

was beweist, dass (B.4) tatsächlich die Lorentz-Transformation von $\vec{x}$. darstellt. Für $\vec{v}$ kollinear zu $\vec{x}$ gehen beide Gleichungen über in die bekannte Form

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \tag{B.6}$$

$$x' = \gamma\left(x - vt\right) \tag{B.7}$$

Anhang C

Wir starten mit

$$\frac{1}{\mu}(\Delta\mathbb{A})\nabla\mathbb{A} = \mathbb{J}\nabla\mathbb{A} \quad\Rightarrow\quad -(\Delta\mathbb{A})\nabla\mathbb{A} - \mu\underline{\mathbb{F}} = 0 \tag{C.1}$$

Darin haben wir folgende Terme:

$$-\nabla\mathbb{A} = \frac{1}{c}\mathbb{E} = s + \vec{i}\cdot\left(\frac{i}{c}\vec{E} + \vec{B}\right) \tag{C.2}$$

$$\Delta\mathbb{A} = \frac{1}{c}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \frac{\partial s}{\partial t}\right) - i\vec{\nabla}\cdot\vec{B} + \vec{i}\cdot\left[i\left(\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla}s\right) - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\right] \tag{C.3}$$

$$-\mu\underline{\mathbb{F}} = -\mu\rho\left\{\frac{1}{c}\left(\vec{v}\cdot\vec{E} + c^2 s\right) - i\vec{v}\cdot\vec{B} + \vec{i}\cdot\left[i\vec{v}\times\vec{B} + i\vec{E} + i\vec{v}s + \frac{1}{c}\left(c^2\vec{B} - \vec{v}\times\vec{E}\right)\right]\right\} \tag{C.4}$$

Gleichung (C.4) ist bereits der zweite Term in (C.1). So müssen wir noch den ersten Term berechnen:

$$-(\Delta\mathbb{A})\nabla\mathbb{A} = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{c}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \frac{\partial s}{\partial t}\right) - i\vec{\nabla}\cdot\vec{B} + \\ \vec{i}\cdot\left[i\left(\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{\nabla}s\right) - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\right] \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} s + \\ \vec{i}\cdot\left(\frac{i}{c}\vec{E} + \vec{B}\right) \end{matrix}\right\} \tag{C.5}$$

Imaginärer Skalarterm

Für den imaginären Skalarterm von (C.5) finden wir:

$$-s\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{=0} - \underbrace{\vec{B}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)}_{0} + \frac{1}{c^2}\underbrace{\vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)}_{`0} + \frac{1}{c^2}\underbrace{\vec{E}\cdot\underbrace{\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}_{=-\vec{\nabla}\times\vec{E}}}_{0} + \vec{B}\cdot\underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{`=\vec{\nabla}\times\vec{B}+\vec{\nabla}s} - \vec{B}\cdot\vec{\nabla}s = \underbrace{\vec{B}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)}_{0} = 0$$

Dies ist, zusammen mit dem imaginären Skalarteil von (C.4): **-**$\mu\rho$**v**·**B** = **-**μ**J**·**B** in (C.1):

$$\mu\vec{J}\cdot\vec{B} = 0 \tag{C.6}$$

Reeller Skalarterm

Berechnen wir den reellen, skalaren Term von (C.5) so ist

$$\frac{1}{c}\left\{s\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) - s\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) - \frac{1}{c^2}\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{E}\cdot\vec{\nabla}s + \vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{B}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\right\} \tag{C.7}$$

Und erweitert:

$$\frac{1}{c}\left\{\begin{matrix} s\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) - s\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) - \frac{1}{c^2}\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{E}\cdot\vec{\nabla}s + \vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{B}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) \\ + \quad 2\vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) - 2\vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) \end{matrix}\right\} \tag{C.8}$$

Nützen wir nun FARADAY's Gesetz

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\vec{J} - \vec{\nabla}s$$

und erhalten

copyright © (2007) by André Waser; www.andre-waser.ch

$$\frac{1}{c}\left\{\begin{array}{l} s\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)-s\dfrac{\partial s}{\partial t}+\vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)-\dfrac{1}{c^2}\vec{E}\cdot\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{E}\cdot\vec{\nabla}s+\vec{B}\cdot\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{B}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) \\ \quad + \quad \dfrac{2}{c^2}\vec{E}\cdot\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}+2\mu\vec{E}\cdot\vec{J}-2\vec{E}\cdot\vec{\nabla}s-2\vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) \end{array}\right\} \tag{C.9}$$

oder

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{1}{c^2}\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\underbrace{\vec{B}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)-\vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)}_{\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)}+2\mu\vec{E}\cdot\vec{J}-\vec{E}\cdot\vec{\nabla}s+s\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)-s\frac{\partial s}{\partial t}\right\}$$

Dann, mit

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}+\frac{\partial s}{\partial t}$$

folgt

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{1}{c^2}\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)+2\mu\vec{E}\cdot\vec{J}-\vec{E}\cdot\vec{\nabla}s+s\frac{\rho}{\varepsilon}\right\} \tag{C.10}$$

Mit dem reellen Skalarteil von (C.4):

$$\frac{1}{c}\left\{\mu\rho\left(\vec{v}\cdot\vec{E}+c^2 s\right)\right\}=\frac{i}{c}\left\{\mu\vec{J}\cdot\vec{E}+s\frac{\rho}{\varepsilon}\right\}$$

zusammen mit (C.9) in (C.1) erhalten wir schließlich Poyntings Theorem in verschiedenen Schreibweisen

$$\frac{1}{c^2}\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)+\vec{E}\cdot\left(\mu\vec{J}-\vec{\nabla}s\right)=0 \tag{C.11}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial E^2}{\partial t}+\frac{\partial B^2}{\partial t}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)+\vec{E}\cdot\left(\mu\vec{J}-\vec{\nabla}s\right)=0 \tag{C.12}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varepsilon E^2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{B^2}{\mu}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\frac{\vec{B}}{\mu}\right)+\vec{E}\cdot\left(\vec{J}-\frac{1}{\mu}\vec{\nabla}s\right)=0 \tag{C.13}$$

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon\frac{\partial E^2}{\partial t}+\mu\frac{\partial H^2}{\partial t}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)+\vec{E}\cdot\left(\vec{J}-\frac{1}{\mu}\vec{\nabla}s\right)=0 \tag{C.14}$$

und mit Einsetzen der Maxwell-Gleichung

$$0=s\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}-\frac{\partial s}{\partial t}-\frac{\rho}{\varepsilon}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(s\vec{E}\right)-\left(\vec{\nabla}s\right)\cdot\vec{E}-s\frac{\partial s}{\partial t}-s\frac{\rho}{\varepsilon}$$

in (C.12) erhalten wir

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s^2}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial E^2}{\partial t}+\frac{\partial B^2}{\partial t}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}-s\vec{E}\right)+\vec{E}\cdot\vec{J}+s\frac{\rho}{\varepsilon}=0 \tag{C.15}$$

copyright © (2007) by André Waser; www.andre-waser.ch

Imaginärer Vektorterm

Für den imaginären Vektorteil von C.5 finden wir:

$$\begin{aligned}&-\vec{B}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)+s\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)-\frac{s}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+s\vec{\nabla}s+\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}\\&+\vec{\nabla}s\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\times\vec{E}-\frac{1}{c^2}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\times\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial s}{\partial t}\vec{E}+\frac{1}{c^2}\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)\end{aligned}\tag{C.16}$$

Mit den Bi-Quaternion MAXWELL Gleichungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\quad\text{und}\quad\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu\vec{J}-\vec{\nabla}s$$

reduzieren wir (C.16) zu

$$s\mu\vec{J}+\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}+\vec{\nabla}s\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\times\vec{E}-\frac{1}{c^2}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\times\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial s}{\partial t}\vec{E}+\frac{1}{c^2}\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)$$

oder

$$\frac{1}{c^2}\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\times\vec{E}-\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial E}{\partial t}\times\vec{B}+\frac{\partial B}{\partial t}\times\vec{E}\right]-\frac{1}{c^2}\frac{\partial s}{\partial t}\vec{E}+\vec{\nabla}s\times\vec{B}+s\mu\vec{J}$$

Um das Vorzeichen des dritten Terms zu ändern, addieren wir den letzten Term

$$\underbrace{\frac{1}{c^2}\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\times\vec{B}+\frac{1}{c^2}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\times\vec{E}}_{\frac{-1}{c^2}\nabla\mathbf{T}}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\times\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial s}{\partial t}\vec{E}+\vec{\nabla}s\times\vec{B}+s\mu\vec{J}-\frac{2}{c^2}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\times\vec{E}$$

benützen AMPERE's Gesetz $\qquad\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

und erhalten

$$\underbrace{\frac{1}{c^2}\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\times\vec{B}+\frac{1}{c^2}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\times\vec{E}}_{\frac{-1}{c^2}\nabla\mathbf{T}}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\times\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial s}{\partial t}\vec{E}+\vec{\nabla}s\times\vec{B}+s\mu\vec{J}$$

und daraus

$$\underbrace{\frac{1}{c^2}\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\times\vec{B}+\frac{1}{c^2}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\times\vec{E}}_{\frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\mathbf{T}}-\frac{1}{c^2}\underbrace{\left[\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}+\vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right]}_{\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial s}{\partial t}\vec{E}+\vec{\nabla}s\times\vec{B}+s\mu\vec{J}\tag{C.17}$$

Mit zwei Vektoridentitäten und mit der FARADAY Gleichung, multipliziert mit *s*

$$\frac{\partial s}{\partial t}\vec{E}=\frac{\partial}{\partial t}\left(s\vec{E}\right)-s\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\;\left(\vec{\nabla}s\right)\times\vec{B}=\vec{\nabla}\times\left(s\vec{B}\right)-s\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right),\;0=s\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\vec{\nabla}\times\vec{B}+\mu\vec{J}\right)$$

wird Gleichung (C.17)

$$\frac{1}{c^2}\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\times\vec{B}+\frac{1}{c^2}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\times\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{B}+s\vec{E}\right)+\vec{\nabla}\times s\vec{B}\tag{C.18}$$

Mit einsetzen von (C.18) und dem imaginäre Vektorteil von (C.4)

$$\mu\rho\vec{i}\cdot\left[\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)+\vec{v}s\right]=\mu\vec{i}\cdot\left[\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}+\vec{J}s\right]$$

in (C.1) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}&\frac{1}{c^2}\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\times\vec{B}+\frac{1}{c^2}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\times\vec{E}\\&\qquad-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{B}+s\vec{E}\right)+\vec{\nabla}\times s\vec{B}=\mu\rho\vec{E}+\mu\vec{J}\times\vec{B}+\mu s\vec{J}\end{aligned}\tag{C.19}$$

copyright © (2007) by André Waser; www.andre-waser.ch

Anhang D: Quantenmechanik

Relativistische Wellengleichung

CONWAY[3] hat 1937 eine mögliche Schreibweise der relativistischen Wellengleichung mit Quaternionen gezeigt, wenn man die HAMILTON'schen Einheiten als Pre- und Postfaktoren verwendet. Nachfolgend wird mit der hier vorgestellten Quaternion-Notation die relativistische Wellengleichung hergeleitet. Dazu benützen wir den Impuls

$$\mathbb{p}_m = m\mathbb{V} \tag{4.1}$$

und die Definition der gesamten Energie einer Masse

$$E \equiv c\left|\mathbb{p}\right| \tag{4.2}$$

so dass daraus und mit (1.24) die EINSTEIN'sche Formel hergeleitet werden kann für k = 1..3:

$$E^2 = m^2c^4 + c^2\sum_k p_k^2 \tag{4.3}$$

Bis hierhin wurde die Energie als eine skalare Funktion ausgedrückt, welche beispielsweise für einen ruhenden Körper einen konstanten Wert annimmt. Die Quantenphysik hat aber gezeigt, dass dies mikroskopisch nicht korrekt ist, sondern dass die Energie oszilliert und somit einer Wellengleichung genügt. Die Gleichung (4.3) kann als ‚statistisch gemittelte' Gleichung einer Ansammlung vieler einzelner „Energieoszillatoren" verstanden werden. Für einzelne sogenannte Elementarpartikel wird die Schwingungseigenschaft der Energie sichtbar.

Gleichung (4.3) ist bereits in einer quadratischen Form, wie dies auch bei den Differentialoperatoren einer Wellengleichung der Fall ist. Um die Wellengleichung hinter der Energiegleichung zu finden, werden die in der Quantenphysik bereits etablierten Substitutionen für die Differentiale benützt

$$E \to -\frac{\hbar}{ic}\frac{\partial}{\partial t} \qquad \text{und} \qquad p_k \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\ , \tag{4.4)a, b}$$

worin $\hbar$ dem PLANCK'schen Wirkungsquantum entspricht. Diese Differentiale müssen nun auf eine neue Funktion angewendet werden. Dies ist nicht anderes als eine (einheitslose) Wellenfunktion $\boldsymbol{\Psi}$. Diese Wellenfunktion kann ebenfalls durch ein Bi-Quaternion dargestellt werden:

$$\boldsymbol{\Psi} = \psi_0 + \vec{i}\cdot i\psi_k \tag{4.5}$$

Damit folgt durch Einsetzen in (4.3) direkt DIRAC's relativistische Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial t^2} - \vec{\Delta}\boldsymbol{\Psi} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\boldsymbol{\Psi} = 0 \tag{4.6}$$

Teilchen ohne externe Potentialfelder

DIRAC hat die Energiegleichung (4.3)

$$E = \pm c\sqrt{m^2c^2 + \sum_k p_k^2} \tag{4.7}$$

durch Wurzelziehen lösen können, indem er Matrizen eingeführt hatte. Anderseits bietet die Gleichung (4.2) eine andere Möglichkeit ohne Wurzelziehen durch direktes Verwenden des Quaternion-Impulses. Das Vorzeichen des Quaternion-Impulses darf sich

copyright © (2007) by André Waser; www.andre-waser.ch

darin allerdings nicht ändern. Dies kann durch ein Umformen von Gleichung (4.2) erreicht werden:

$$\mathbb{E} \equiv \pm c\mathbb{p} \qquad \text{denn es ist} \quad E = \left|\mathbb{E}\right| = \pm c\left|\mathbb{p}\right| \tag{4.8}$$

Die beiden möglichen Vorzeichen zum Energiezustand in (4.7) und (4.8) hat DIRAC veranlaßt, die Existenz von Antiteilchen – insbesondere des Positrons – zu postulieren. Durch Einsetzen der Substitutionen (4.4) in (4.8) folgt eine weitere Gleichung DIRAC's:

$$\hbar\left(\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial x_1}i+\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial x_2}j+\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial x_3}k+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial t}\right)-mc\boldsymbol{\Psi}=0\ , \tag{4.9}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich auf den ersten Blick zur originalen DIRAC-Gleichung dadurch, dass keine Matrizen verwendet werden. Allerdings lassen sich auch die HAMILTON'schen Einheiten als Matrizen schreiben (siehe Anhang E). Durch Ausmultiplizieren von (4.9) folgt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
&\frac{\hbar}{c}\frac{\partial\psi_0}{\partial t}-mc\psi_0-\frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\psi_3}{\partial x_3}\right)=0\\
&\frac{\hbar}{c}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}-mc\psi_1+\hbar\left(i\frac{\partial\psi_0}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi_3}{\partial x_2}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}\right)=0\\
&\frac{\hbar}{c}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}-mc\psi_2+\hbar\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}+i\frac{\partial\psi_0}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3}\right)=0\\
&\frac{\hbar}{c}\frac{\partial\psi_3}{\partial t}-mc\psi_3-\hbar\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}-i\frac{\partial\psi_0}{\partial x_3}\right)=0
\end{aligned}\ , \tag{4.10}$$

Wie bei dem DIRAC'schen Gleichungssystem werden auch hier vier Gleichungen für ein Teilchen ohne externe Potentialfelder vorgestellt. Analog zum Vorgehen ohne externe Potentiale kann auch mit externen Potentialen vorgegangen werden.

Teilchen im externen Potentialfeld

Durch ein externes Potentialfeld ändert sich der Impuls eines geladenen Teilchens. Definiert man den Impuls eines externen Feldes auf eine Ladung q mit

$$\mathbb{p}_q = -q\mathbb{A} \tag{4.11}$$

so folgt für dessen Energie

$$E_q \equiv c\left|\mathbb{p}_q\right| = -cq\left|\mathbb{A}\right| \tag{4.12}$$

und

$$\mathbb{E}_q = \mp cq\mathbb{A} \tag{4.13}$$

Die Gesamtenergie ist dann

$$\mathbb{E} = c\left(\pm\mathbb{p}_q \mp q\mathbb{A}\right) \tag{4.14}$$

Die erweiterte DIRAC Gleichung folgt daraus wieder durch die Substitution der Energie und des Impulses:

$$\hbar\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-qA_1\right)i+\left(\frac{\partial}{\partial x_2}-qA_2\right)j+\left(\frac{\partial}{\partial x_3}-qA_3\right)k+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\boldsymbol{\Psi}-\left(mc+q\frac{\varphi}{c}\right)\boldsymbol{\Psi}=0 \tag{4.15}$$

Auch in diesem Fall können Quaternionen anstelle von Matrizen verwendet werden.

copyright © (2007) by André Waser; www.andre-waser.ch

Anhang E: Matrizen in Quaternion-Form

Nach Arthur CAYLEY lassen sich komplexe Zahlen als Matrizen darstellen:

$$a+ib=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\quad \text{mit}\quad i=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} \tag{4.16}$$

Beispiel:

$$i^2=ii=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-1 \tag{4.17}$$

Die HAMILTON'schen Einheiten der Quaternionen bilden zusammen mit den Zahlen 1 und –1 eine nicht-ABEL'sche Gruppe achter Ordnung, deren ersten vier positiven Elemente sind:

$$i=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}\qquad j=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\qquad k=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\qquad 1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \tag{4.18}$$

Ersetzt man nun die imaginäre Einheit i mit der Matrix (4.16), so folgt:

$$i=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\quad j=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$k=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\quad 1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \tag{4.19}$$

Das Quadrat dieser Matrizen ergibt jeweils –1, wie es die HAMILTON'sche Definition (1.2) verlangt.